0. ÎNTRODUCERE

Pentru analiza calitativă şi cantitativă a fenomenelor din lumea care ne înconjoară drept punct de plecare serveşte modelul matematic al acestor fenomene. În aceste împrejurări deacuma la momentul creării modelului matematic devine necesară întroducerea noţiunii de mărimi ideale pentru tipul dat de fenomene. Aşa, spre exemplu, la studierea mişcării corpurilor materiale se întroduce noţiunea de *punct material* – obiect cu masă finită şi dimensiuni nule. În realitate obiectele fizice studiate posedă dimensiuni finite, dar în cazul cînd raportul acestor dimensiuni la dimensiunile caracteristice ale traiectoriei mişcării este mic, acest obiect în unele cazuri poate fi identificat ca un punct material. Astfel, la mişcarea orbitală în jurul Soarelui, Pămîntul poate fi, cu o exactitate destul de mare, socotit drept punct material. Într-adevăr, raza Pămîntului $R_P \approx 6400$ km, raza orbitei Pămîntului $R_{P-S} \approx$ ≈ 150000000km şi raportul $\gamma = R_P / R_{P-S} \approx 0{,}000043 << 1$.

Fie $\Phi(\gamma)$ – funcţia care descrie careva caracteristică a traiectoriei mişcării Pămîntului în jurul Soarelui, calculată pentru valori finite ale lui γ. Atunci $\Phi_0 =$ $= \lim_{\gamma \to 0} \Phi(\gamma)$ reprezintă valoarea acestei caracteristici, obţinută cu convenţia că Pămîntul este un punct material. Estimarea acestei idealizări poate fi obţinută din reprezentarea funcţiei $\Phi(\gamma)$ în vecinătatea punctului $\gamma = 0$. Pentru tipul de probleme studiate $\Phi(\gamma) =$ $= \Phi_0 + \alpha\gamma^2$ şi, ca urmare, aproximarea Pămîntului în mişcarea pe orbită cu un punct material este satisfăcută cu o exactitate destul de mare. Analiza mişcării orbitale a Pămîntului în această aproximaţie simplifică cu mult studierea problemei.

În cadrul modelului matematic admis, soluţionarea problemelor concrete duce la necesitatea de a rezolva ecuaţii în cel mai larg sens al acestui cuvînt – transcendente, diferenţiale, integrale, funcţionale etc. Rezolvarea acestor ecuaţii într-o formă analitică închisă are o mare însemnătate, dat fiind că ea permite analiza dependenţei fenomenelor date de parametru. Cu regret, însă, obţinerea soluţiilor în formă analitică este posibilă numai în cazuri excepţionale. În majoritatea cazurilor pentru obţinerea soluţiilor este necesar de aplicat şi elaborat diferite metode aproximative.

Lucrarea dată este consacrată descrierii detaliate a unui şir de metode de aşa tip, unite sub denumirea de *asimptotice*. Mulţimea acestor metode reprezintă un aparat puternic de analiză a diferitor tipuri de probleme şi, ca urmare, asimilarea metodelor asimptotice este necesară pentru studierea problemelor fizicii teoretice.

Sub o formă generală calea, specifică pentru metodele asimptotice, poate fi descrisă în felul următor. Fie că analiza unui fenomen în formularea matematică duce la necesitatea de a rezolva ecuaţia

$$B(u, x; \gamma) = 0, \tag{0.1}$$

unde B este simbolul reprezentării sub formă de operator a corelaţiei problemei, $u(x, \gamma)$ sunt funcţiile iniţiale care satisfac ecuaţia operaţională (0.1), x este mulţimea argumentelor independente, γ parametrul problemei. Fie, mai departe, că pentru $\gamma = \gamma_0$ este cunoscută soluţia ecuaţiei (0.1). Prin aplicarea metodelor asimptotice se soluţionează problema de construire a soluţiilor ecuaţiei (0.1) în vecinătatea valorii $\gamma = \gamma_0$. În particular, γ_0 poate căpăta atît valori nule, cît şi infinite. Pentru valori asimptotice ale parametrului examinarea soluţionării problemei se reduce esenţial, ceea ce şi confirmă succesul aplicării procedeelor asimptotice.

Menţionăm, că în prezent există deacuma metode de analiză asimptotică bine aprobate, dirijate spre soluţionarea unor tipuri de probleme (0.1), dar dezvoltarea ştiinţei duce la apariţia mai multor probleme, care cer, pentru soluţionare, elaborarea unor mijloace matematice noi.

Necătînd la faptul că Newton şi Laplace au aplicat procedeul asimptotic la descrierea mişcării planetelor Sistemului Solar, pentru prima dată argumentarea matematică strictă a analizei asimptotice a fost dată de marele matematician francez Poincaré H. El a întrodus noţiunea de serie asimptotică, care stă la baza tuturor metodelor asimptotice, noţiunea de convergenţă a acestor serii, operaţii asupra acestor serii etc. Dat fiind, că aceste noţiuni sunt foarte importante pentru expunerile de mai departe, aducem aici definiţiile, afirmaţiile utilizate în continuare, la fel şi cîteva exemple demonstrative de aplicare a procedeului asimptotic pentru rezolvarea unui şir de probleme de analiză. Exemplele studiate ne fac o impresie bună despre eficacitatea aplicării procedeului asimptotic.

Una din cele mai simple probleme de acest tip poate servi calcularea sumei seriei numerice

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, . \tag{0.2}$$

Dacă seria (0.2) este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ şi, prin urmare, a_n prezintă o mărime infinit de mică pentru $n >> 1$.

Fie că

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \tag{0.3}$$

este suma seriei numerice, pentru care pe de-o parte

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_k^0} = c \, , \qquad c \neq 0, \infty \, , \tag{0.4}$$

iar, pe de altă parte suma S_0 este cunoscută sau uşor se calculează. Atunci, reprezentînd (0.2) sub formă echivalentă

$$S = cS_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n - ca_n^0\right), \qquad (0.5)$$

reducem problema la calcularea sumei seriei

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n - ca_n^0\right). \qquad (0.6)$$

Dat fiind că, potrivit relaţiei (0.4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n - ca_n^0}{a_n} = 0$, descreşterea termenilor seriei numerice (0.6) cu creşterea lui n are loc cu mult mai repede decît a termenilor seriei (0.2) şi, drept urmare, din punct de vedere al efectuării calculelor nemijlocite este cu mult mai simplu de căpătat suma seriei (0.6).

Drept exemplu concret vom examina problema calculării sumei

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}. \qquad (0.7)$$

În cazul dat $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ şi pentru $n >> 1$, $a_n \approx \frac{1}{n^2}$. Vom calcula suma seriei numerice cu $a_n^0 = \frac{1}{n(n+1)}$:

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1$$

iar $a_n^0 \approx \frac{1}{n^2}$ pentru $n >> 1$. În conformitate cu (0.5) obţinem

$$S = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n^2+1)(n+1)n}. \qquad (0.8)$$

Aşa, spre exemplu, dacă pentru a obţine suma seriei (0.7) cu exactitatea de ~ 0.001 este necesar de evaluat ~1000 de termeni, atunci pentru a atinge aceeaşi exactitate este suficient în (0.8) de limitat numai cu ~30 termeni.

Aşa dar, utilizarea informaţiei despre comportarea asimptotică a termenilor seriei numerice (0.7) ne-a adus la un procedeu mai eficaci de sumare numerică a acestei serii. Analiza detaliată a problemelor de aşa tip poate fi găsită în [12], [13], [16], [17].

Aceeaşi idee poate fi utilizată şi la construirea procedeelor numerice eficace de calculare a integralelor inproprii. Fie că e necesar de calculat integrala de tipul

$$I=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{\alpha}}dx, \quad f(0)\neq 0, \quad 0<\alpha<1. \tag{0.9}$$

Funcţia de sub semnul integralei în (0.9) pentru $x=0$ se transformă în infinit şi din această cauză pentru a calcula această integrală este necesar de aplicat formulele speciale în cuadraturi. Însă o transformare simplă a funcţiei de sub semnul integralei (0.9), ţinînd cont de comportarea ei asimptotică în vecinătatea apropiată a valorii $x=0$, permite transformarea integralei improprii în integrală obişnuită la calcularea căreia pot fi aplicate formule standarde în cuadraturi de tipul Simpson. Obţinem

$$I=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{\alpha}}dx \equiv \int_0^1 \frac{f(0)+f(x)-f(0)}{x^{\alpha}}dx = \frac{f(0)}{1-\alpha}+\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}dx, \quad \varphi(x)\equiv f(x)-f(0).$$

Dat fiind, că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}=0$, pentru a calcula integrala în partea dreaptă a ultimei egalităţi vom aplica procedeele obişnuite de calculare a integralei. Pentru prima dată această idee a fost expusă de L. V. Kantorovich (vezi [17]).

Aşa dar, ca şi în cazul sumării seriilor numerice, utilizarea specificului comportării asimptotice a funcţiilor de sub semnul integralelor inproprii conduce la procedee asimptotice mai eficace şi duce iarăşi la crearea algoritmilor eficaci de calculare a acestor tipuri de integrale.

În continuare vom examina un exemplu de problemă la limită în derivate parţiale. O simplă reformulare a problemei, ţinînd cont de comportarea asimptotică a soluţiei conduce la procedee numerice mult mai eficace de rezolvare a ei.

Fie că se caută soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia Poisson

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4\pi q\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0), \tag{0.10}$$

definită în domeniul Ω şi cu condiţia că pe suprafaţa S, care mărgineşte acest domeniu, soluţia este $u(x,y,z)=\varphi(x_S, y_S, z_S)$, unde $\varphi(x_S, y_S, z_S)$ este o funcţie definită pe suprafaţa S. Vom admite la fel că (x_0, y_0, z_0) este un punct din interiorul domeniului Ω.

Vom analiza rezolvarea numerică a acestei ecuaţii. Mai întîi menţionăm, că prezenţa în partea dreaptă (0.10) a funcţiei δ, o discretizare directă a problemei la limită (0.10) cu aplicarea aproximaţiilor diferenţe finite pentru derivate sau aproximaţiilor elemente finite a soluţiei căutate duce la inexactităţi evidente, dat fiind că în punctul (x_0, y_0, z_0) soluţia $u(x,y,z)$ se transformă în infinit.

Vom ţine cont de faptul că funcţia $1/r$ $\left(r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right)$ este soluţia fundamentală a ecuaţiei Laplace şi în conformitate cu aceasta [4]

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0),\quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,. \qquad (0.11)$$

Ţinînd cont de (0.11) vom căuta soluţia problemei la limită (0.10) sub forma

$$u(x,y,z)=\frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}+u_0(x,y,z)\,. \qquad (0.12)$$

unde $u_0(x,y,z)$ este funcţia care trebuie definită. Înlocuind (0.12) în (0.10) şi ţinînd cont de (0.11) obţinem problema la limită Dirichlet pentru ecuaţia Laplace în raport cu funcţia $u_0(x,y,z)$

$$\Delta u_0(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in\Omega,\quad u_0(P_S)=\varphi(P_S)-\frac{q}{r_{P_0P_S}}\,, \qquad (0.13)$$

unde $P_S\in S$ este punctul care aparţine suprafeţei S, iar $r_{P_0P_S}= =\sqrt{(x_S-x_0)^2+(y_S-y_0)^2+(z_S-z_0)^2}$ este distanţa de la sarcina punctiformă q pînă la punctul de pe suprafaţă P_S.

Problema la limită (0.13) este regularizată şi discretizarea ei în diferenţe finite sau elemente finite devine legitimă şi eficace.

Vom mai expune un exemplu de utilizare a analizei asimptotice pentru a construi aproximaţii în diferenţe finite eficace ale operatorilor de diferenţiere. Cu scopul de a simplifica expunerea vom studia aproximaţia diferenţelor finite a problemei la limită liniară, descrisă de ecuaţia de gradul doi

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x),\quad 0<x<l\,, \qquad (0.14)$$

$$\alpha_1 y(0)+\beta_1 y'(0)=A,\quad \alpha_2 y(l)+\beta_2 y'(l)=B\,,\ \alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0\,,\ i=1,2\,.$$

Este cunoscut [21], că dacă coeficienţii $p(x)$, $q(x)$ şi partea dreaptă $f(x)$ din ecuaţia (0.14) sunt funcţii analitice, atunci şi soluţia $y(x)$ la fel este o funcţie analitică. În acest caz la discretiztarea prin diferenţe finite a problemei la limită (0.14) derivatele în toate punctele din interiorul intervalului $(0,l)$ pot fi aproximate, spre exemplu, prin diferenţe simetrice finite

$$y'(x_i)\approx\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{2h},\quad y''(x_i)\approx\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2}\,, \qquad (0.15)$$

iar la capetele intervalului $(0,l)$ – cu diferenţe finite de tipul (pentru concretizare sunt luate aproximaţiile derivatelor în punctul $x=0$)

$$y'(0) \approx \frac{-3y(0) + 4y(h) - y(2h)}{2h}, \quad y''(0) \approx \frac{y(0) - 2y(h) + y(2h)}{h^2}. \tag{0.16}$$

Calculele nemijlocite cu aplicarea descompunerii funcţiei $y(x_i \pm h)$ în serie după puterile lui h demonstrează, că ecuaţiile (0.15) şi (0.16) aproximează derivatele respective cu exactitatea $\sim h^2$.

Dar la rezolvarea problemelor fizice este naturală situaţia cînd coeficienţii $p(x)$, $q(x)$, sau funcţia $f(x)$ nu sunt funcţii analitice. În aceste cazuri soluţia problemei la limită (0.14) la fel poate să nu fie funcţie analitică şi în aceste cazuri aplicarea aproximaţiilor (0.15) pentru derivate pot conduce la erori destul de mari.

În calitate de exemplu simplu a unei aşa situaţii vom studia aproximarea derivatelor de ordinul unu şi doi pentru funcţia $y(x) = \sqrt{x}$ în punctul $x = 0$ cu convenţia că valorile funcţiei $y(x)$ pot fi calculate numai în punctele $x = 0$, $x = h$ şi $x = 2h$. În conformitate cu (0.16) obţinem $y'(0) \approx (4 - \sqrt{2}) / 2\sqrt{h}$ şi $y''(0) \approx (2 - \sqrt{2}) / \sqrt{h^3}$ în timp ce ambele derivate pentru $x = 0$ se transformă în infinit. Vom reveni acum la aproximaţia diferenţelor finite în problema la limită (0.14). Fie că în rezultatul analizei asimptotice am determinat că soluţia $y(x)$ în vecinătatea punctului $x = 0$ se comportă ca $y(x) \sim x^{\nu}$. Atunci soluţia problemei la limită va fi căutată sub forma

$$y(x) = x^{\nu} u(x), \tag{0.17}$$

unde $u(x)$ este o funcţie regulată. Înlocuind în (0.14) expresiile

$$y'(x) = \nu x^{\nu-1} u(x) + x^{\nu} u'(x), \; y''(x) = x^{\nu} u''(x) + 2\nu x^{\nu-1} u'(x) + \nu(\nu - 1) x^{\nu-2} u(x)$$

obţinem o problemă la limită pentru funcţia $u(x)$. Acum pentru discretizarea prin diferenţe finite a problemei la limită sunt valabile aproximaţiile (0.15), (0.16) pentru derivatele $u'(x)$ şi $u''(x)$.

În toate exemplele studiate a fost aplicat procedeul cunoscut sub denumirea de *accelerare a convergenţei*. O descriere detaliată a acestor tipuri de probleme şi o diversitate de exemple de utilizare a acestui procedeu pentru rezolvarea unui şir de probleme de matematică de calcul poate fi găsită în [12], [13], [17].

Trecem la expunerea noţiunilor fundamentale ale analizei asimptotice. Vom porni de la identitatea

$$f(x) \equiv f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tau) d\tau \tag{0.18}$$

cu condiţia că funcţia $f(x)$ este diferenţiabilă şi integrala din (0.18) există. Aplicînd (0.18) deacuma pentru funcţia $f'(x)$ (cu presupunerea că operaţiile efectuate sunt valabile) obţinem reprezentarea pentru funcţia $f(x)$

$$f(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x), \quad r_1(x) = \int_{x_0}^{x} (x-\tau) f''(\tau) d\tau\,, \tag{0.19}$$

iar aplicarea acestui procedeu de n ori ne conduce la identitatea

$$f(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \tag{0.20}$$

unde $r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)d\tau$.

În legătură cu reprezentarea funcţiei $f(x)$ sub forma (0.20) vom face cîteva obiecţii. Remarcăm, mai întîi, că (0.20) este satisfăcută pentru toate valorile lui x din intervalul dat. Însă din punct de vedere practic prezintă un mare interes elucidarea condiţiilor pentru care este posibilă aproximaţia funcţiei $f(x)$ în vecinătatea punctului $x = x_0$ cu gradul de exactitate necesar prin segmentul finit al seriei de puteri, adică

$$f(x) \underset{|x-x_0|<<1}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,. \tag{0.21}$$

Pentru valorile lui n fixate eroarea în reprezentarea (0.21) a funcţiei $f(x)$ este determinată de mărimea $r_n(x)$ din (0.20) şi pentru $x \to x_0$ această eroare este o mărime infinit de mică în raport cu ultimul termen din (0.21).

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)d\tau}{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n} = 0\,. \tag{0.22}$$

Reprezentarea (0.21) este una din cele mai simple şi una din cele mai esenţiale reprezentări asimptotice ale funcţiilor şi este aplicată pe larg în calculele practice.

Pentru un şir de funcţii elementare descompunerea asimptotică (0.21) în aproximaţia primilor doi-trei termeni în vecinătatea punctului $x_0 = 0$ ($|x| << 1$) are forma:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}\,,$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}\ , \quad sh\,x \approx x + \frac{x^3}{6}, \quad ch\,x \approx 1 + \frac{x^2}{2}, \quad th\,x \approx x - \frac{x^3}{3}, \tag{0.23}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad tg\,x \approx x + \frac{x^3}{3}.$$

În cazul, cînd $f(x)$ este funcţie analitică în punctul x_0, adică cînd există derivatele de orice grad în acest punct şi ea poate fi reprezentată printr-o serie convergentă de puteri în apropierea acestui punct aproximaţia funcţiei $f(x)$ printr-un segment de serie de puteri poate fi ameliorată din contul măririi numărului de termeni ai seriei (valorile lui n în (0.21)).

Dar dacă funcţia $f(x)$ posedă numai un număr finit de derivate în punctul x_0 şi reprezentarea (0.20) corespunde acestui număr, reprezentarea (0.21) nu mai poate fi ameliorată pentru valori fixate ale lui x. În acest caz mărimea $r_n(x)$ determină cea mai mică posibilitate de aproximaţie a funcţiei $f(x)$ prin expresia (0.21). Limitîndu-ne în descompunerea (0.21) cu un număr mai mic de termeni ai seriei, facem să crească eroarea aproximaţiei.

Expresia (0.21) este o *reprezentare asimptotică* (sau *consecutivitate asimptotică*) pentru funcţia $f(x)$ dacă este satisfăcută condiţia (0.22). Menţionăm că de rînd cu condiţia (0.22) pentru consecutivitatea asimptotică întotdeauna este satisfăcută condiţia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)}{(k+1) f^{(k)}(x_0)} = 0\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, n-1, \tag{0.24}$$

sau fiecare termen următor al consecutivităţii asimptotice în (0.21) este o mărime infinit de mică în comparaţie cu termenul premărgător.

În cazul consecutivităţii asimptotice (0.21) se spune că este dată *scara de puteri de comparare* a mărimilor infinit de mici. Însă, în cazul general, şi aceasta este întîlnit mai frecvent în analiza asimptotică, în mod natural apare reprezentarea de tipul

$$f(x) \equiv \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) + r_n(x) \tag{0.25}$$

valabilă pentru toate valorile $x \in [a,b]$.

Dacă în vecinătatea punctului $x = x_0 \in [a,b]$ sunt satisfăcute condiţiile

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi_n(x)} = 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{0.26}$$

atunci în această vecinătate este valabilă reprezentarea asimptotică

$$f(x) \underset{|x-x_0|<<1}{\approx} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x). \tag{0.27}$$

În acelaşi timp, dacă în (0.27) se ţine cont de toţi n termeni, atunci eroarea în acest caz este cea mai mică.

Menţionăm, că în formula (0.27) sunt reprezentate şi funcţiile care se transformă în punctul $x = x_0$ în infinit. Reprezentarea asimptotică pentru funcţiile $f(x)$ în acest caz se scriu în forma

$$f(x) \underset{|x-x_0|<<1}{\approx} \varphi_{-m}(x) + \varphi_{-m+1}(x) + \cdots + \varphi_{-1}(x) + C + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x), \tag{0.28}$$

unde $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi_k(x) = \infty$ pentru $k = -m, -m+1, \cdots, -1$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi_k(x) = 0$ pentru $k = 1, 2, \cdots, n$, $C \neq \infty$ este o mărime constantă în aşa mod, că $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)} = 0$ pentru $k = -m, -m+1, \cdots, 1, 2, \cdots, n$. Partea consecutivităţii asimptotice în (0.28) care include numai suma funcţiilor $\varphi_k(x)$ cu indicii negativi vom numi-o *partea singulară* a reprezentării asimptotice. *Partea principală* a reprezentării asimptotice reprezintă suma părţii singulare şi constanta C. Reprezentarea asimptotică completă a funcţiei $f(x)$ se scrie sub forma (0.28). Termenul principal al descompunerii asimptotice este definit de funcţia $\varphi_{-m}(x)$ în descompunerea (0.28) şi $\varphi_1(x)$ în descompunerea (0.27). Se convine că funcţiile $\varphi_k(x)$ $(k = -m, -m+1, \cdots, 1, 2, \cdots, n)$ determină scara de comparare a mărimilor infinit de mici pentru valorile pozitive ale lui k şi celor infinit de mari – pentru valori negative ale lui k.

Menţionăm în exclusivitate, că din definiţia consecutivităţii asimptotice imediat urmează, că în scara dată de comparare a mărimilor variabile, reprezentarea asimptotică (0.28) (sau (0.27)) este unică.

În continuare, la anliza asimptotică a problemelor concrete, ca regulă, ne vom limita cu determinarea părţii principale a reprezentării asimptotice a funcţiei $f(x)$.

Exerciţii

1. Să se obţină descompunerea asimptotică pentru $|x| << 1$şi $x >> 1$ a expresiilor de mai jos, aproximîndu-le cu primii trei termeni în descompunere:

a) $\sqrt{1+x+x^2}$; b) $arc\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; c) $\ln\dfrac{1+x+x^2}{\sqrt{1+2x}}$;

d) $arctg\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$; f) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.