1.1. Analiza funcţiilor implicite

Reprezentarea dependenţei $y(x)$ sub forma implicită, adică sub forma

$$F(y,x)=0 \tag{1.1.1}$$

este o formă generală pentru modelarea şi studierea proceselor fizice. În continuare vom considera $y(x)$ drept o funcţie scalară de argumentul scalar x, iar $F(y,x)=0$ o funcţie definită de argumentele y şi x. Fie $F(y_0,x_0)=0$. Dependenţa $y(x)$ în vecinătatea punctului $x=x_0$ este determinată de teorema fundamentală a analizei matemtice despre funcţiile implicite (vezi spre exemplu [1]):

a) Fie $F(y,x)$ o funcţie definită şi continuă în domeniul $D\,(D: y\in(y_0-d, y_0+d),\ x\in(x_0-a, x_0+a)$, strict monotonă după variabila y pentru valorile lui x fixate $x\in(x_0-a,x_0+a)$ şi $F(y_0,x_0)=0$. Atunci în domeniul D ecuaţia $F(y,x)=0$ defineşte funcţia $y(x)$ continuă şi univocă, în aşa mod că $y_0=y(x_0)$;

b) Dacă funcţia $F(y,x)$ este diferenţiabilă în domeniul D după variabilele y şi x, şi $\partial F/\partial y\neq 0$ pentru $(x,y)\in D$, atunci $y(x)$, este o funcţie diferenţiabilă în intervalul $x\in(x_0-a,x_0+a)$ şi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y},\quad (x,y)\in D \tag{1.1.2}$$

c) Dacă în domeniul D există derivatele $\partial^n F(y,x)/\partial y^k\partial x^{n-k}$ $(k=0,1,2,\dots,n)$, atunci exista si derivatele de ordinul n inclusiv a funcţiei $y(x)$. Expresiile derivatelor $d^k y/dx^k$ $(k=2,3,\dots,n)$ pot fi obţinute printr-o diferenţiere simplă a ambelor părti a relaţiei (1.1.2) după argumentul x, ţinînd cont că funcţia $F(y,x)$ este o funcţie compusă de variabilă x, adică $F(y,x)=F[y(x),x]$.

Spre exemplu, pentru derivata d^2y/dx^2 avem:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\frac{F_x}{F_y}=-\frac{(F_x)'F_y-F_x(F_y)'}{F_y^2}=-\frac{(F_{xx}+F_{xy}y')F_y-F_x(F_{xy}+F_{yy'}y')}{F_y^2}\ ,$$

unde au fost utilizate notaţiile: $F_x=\partial F/\partial x$, $F_y=\partial F/\partial y$, $F_{xx}=\partial^2F/\partial x^2$, $F_{xy}=\partial^2F/\partial x\partial y$, $F_{yy}=\partial^2F/\partial y^2$.

Prin aceeaşi metodă pot fi calculate derivatele de ordin superior $d^k y/dx^k$ $(k=3,4,\cdots)$.

d) Fie că în punctul $(x_0, y_0) \in D$ funcţia $F(y,x)$ este analitică, adică poate fi dezvoltată în seria Taylor după puterile întregi, pozitive ale mărimilor $(y - y_0)$ şi $(x - x_0)$, dat fiind că $F(y_0, x_0) = 0$ şi $F_y(y_0, x_0) \neq 0$

$$F(y,x) = \sum_{i,j=0} \alpha_{ij}(y - y_0)^i (x - x_0)^j = 0, \alpha_{00} = 0, \alpha_{10} \neq 0. \tag{1.1.3}$$

În acest caz funcţia $y(x)$ este analitică în domeniul D şi în vecinătatea punctului $x = x_0$ poate fi reprezentată prin seria Taylor

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \ . \tag{1.1.4}$$

Posibilitatea de a reprezenta funcţia implicită $y(x)$ în vecinătatea punctului $x = x_0$ sub forma (1.1.4) joacă un rol important pentru obţinerea reprezentărilor asimptotice ale soluţiilor ecuaţiei (1.1.1).

Menţionăm că, reprezentarea funcţiei implicite $y(x)$ sub forma seriei de puteri (1.1.4) implică necesitatea unor calcule voluminoase în determinarea derivatelor de ordin superior $y^{(p)}(x)$, $(p = 2,3,\dots)$. Este mult mai comod în aplicaţii practice de utilizat reprezentarea funcţiei $y(x)$ sub formă de serie de puteri cu coeficienţii nedefiniţi $c_i, (i = 1,2,\dots)$ (admiţînd că condiţiile de existenţă a funcţiei implicite analitice, formulate mai sus, sunt satisfăcute):

$$y(x) = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots . \tag{1.1.5}$$

Coeficienţii nedefiniţi c_i se determină prin metoda lui Newton, aplicată în lucrările sale consacrate calculului diferenţial. În conformitate cu această metodă, înlocuirea în (1.1.3) a reprezentărilor (1.1.5) pentru $y - y_0$ transformă partea stîngă a expresiei $F(y,x) = 0$ în identitate de tipul:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i (x - x_i)^i \equiv 0, \tag{1.1.6}$$

unde coeficienţii β_i pot fi exprimaţi prin α_i şi c_i .

Dat fiind că sistemul de funcţii $1, (x - x_0), (x - x_0)^2, \dots$ este liniar independent, identitatea (1.1.6) poate fi satisfăcută numai în cazul cînd toţi coeficienţii β_i $(i = 1,2,\dots)$ sunt zero:

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \dots \ , \tag{1.1.7}$$

care reprezintă condiţiile pentru determinarea coeficienţilor nedefiniţi c_i. Vom efectua calculul concret al coeficienţilor c_1 şi c_2. În conformitate cu (1.1.5) în acest caz este necesar de păstrat numai termenii care conţin $(y - y_0), (x - x_0),$

$(y-y_0)^2$, $(y-y_0)(x-x_0)$, $(x-x_0)^2$. Atunci

$$F(y,x) \approx \alpha_{10}(y-y_0)+\alpha_{01}(x-x_0)+\alpha_{20}(y-y_0)^2+\alpha_{11}(y-y_0)(x-x_0)+\alpha_{02}(x-x_0)^2 \ . \quad (1.1.8)$$

Înlocuind în (1.1.8) $(y-y_0)$ din (1.1.5) scriem $F(y,x)$ (păstrînd termenii în puterea a doua după $(x-x_0)$) sub forma:

$$F(y,x) \approx \beta_1(x-x_0)+\beta_2(x-x_0)^2 \quad (1.1.9)$$

cu $\beta_1 = \alpha_{10}c_1 + \alpha_{01}$, $\beta_2 = \alpha_{10}c_2 + \alpha_{20}c_1^2 + \alpha_{11}c_1 + \alpha_{02}$. Utilizînd condiţiile (1.1.7) calculăm valorile coeficienţilor c_1, c_2.:

$$c_1 = -\alpha_{01}/\alpha_{10} \ , \quad c_2 = -(\alpha_{02}+\alpha_{11}c_1+\alpha_{20}c_1^2)/\alpha_{10} \ . \quad (1.1.10)$$

Analogic se calculează şi coeficienţii $c_3, c_4, c_5, \ldots$.

Menţionăm,că metoda descrisă pentru determinarea coeficienţilor c_i poate fi usor algoritmizată şi poate fi efectuată atît numeric cît şi sub formă de simboluri aplicînd pachetele “Matematica” sau “Matlab”.