1.2 . Analiza asimptotică a ecuaţiilor neliniare

Fie dată ecuaţia neliniară

$$f(x) = 0 \ . \tag{1.2.1}$$

Notăm prin x_* soluţia acestei ecuaţii (sau una din soluţii în cazul existenţei soluţiilor multiple) şi convenim că $f'(x_*) \neq 0$ (x_* este o rădăcină simplă). Prin urmare

$$f(x_*) = 0, \ f'(x_*) \neq 0 \, . \tag{1.2.2}$$

Vom construi soluţia aproximativă a ecuaţiei neliniare (1.2.1) aplicînd metoda iterativă. Fie $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ o continuitate convergentă de numere, generată de această metodă, adică $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$. În continuare vom analiza detaliat două metode de determinare a soluţiei ecuaţiei (1.2.1): metoda lui Newton şi generalizarea ei; şi metoda iterativă. Ambele metode sînt aplicate pe larg atît pentru efectuarea calculelor numerice nemijlocite cît şi la obţinerea soluţiilor asimptotice.

Metoda lui Newton. Fie x_n- o soluţie aproximativă a ecuaţiei (1.2.1) la pasul n. Pentru a construi aproximaţia următoare x_{n+1} reprezentăm funcţia $f(x)$ în vecinătatea punctului x_n în funcţie de variabila τ, conform definiţiei:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)\tau \, . \tag{1.2.3}$$

Menţionăm că reprezentarea funcţiei $f(x)$ prin funcţia liniară (1.2.3) este exactă. Aşa reprezentare este întotdeauna posibilă în domeniul de variaţie monotonă a funcţiei $f(x)$, adică în domeniul în care $f'(x_0) \neq 0$.

Una din metodele de reflectare univocă reciprocă a funcţiei $f(x)$ pe dreapta (1.2.3) este proiecţia ortogonală a graficului funcţiei $y(x)$ pe dreapta $f(x_n) + f'(x_n)\tau$. Expresia (1.2.3) permite obţinerea soluţiei exacte a ecuaţiei (1.2.1):

$$\tau_* = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ . \tag{1.2.4}$$

Convenim că (1.2.3) este o definiţie a funcţiei $x(\tau)$ sub formă implicită.

$$F(x,\tau) \equiv f(x) - f(x_n) - f'(x_n)\tau = 0 \, . \tag{1.2.5}$$

Vom căuta dependenţa $x(\tau)$ în vecinătatea punctului $x = x_n$ sub forma

$$x = x_n + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \alpha_3\tau^3 + \dots \ . \tag{1.2.6}$$

Dat fiind că $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x)$, iar $f'(x_n) \neq 0$ (prin convenţie) în baza teoremei funcţiilor implicite, reprezentarea dependenţei $x(\tau)$ în forma (1.2.6) este argumentată. În particular, pentru $\tau = \tau_*$ obţinem expresia soluţiei căutate x_*

$$x_* = x(\tau_*) = x_n + \alpha_1 \tau_* + \alpha_2 \tau_*^2 + \dots \ . \tag{1.2.7}$$

Coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ în (1.2.6) pot fi calculaţi prin metoda descrisă în § 1.1. Fie $f(x)$ - o funcţie analitică şi în vecinătatea punctului x_n reprezentată prin seria

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} f^p(x_n) \frac{(x - x_n)^p}{p} \ .$$

Înlocuind această descompunere în (1.2.5) şi ţinînd cont de (1.2.6) o transformăm într-o identitate în raport cu τ :

$$(\alpha_1 - 1) f'(x_n)\tau + \left(\frac{f''(x_n)}{2!}\alpha_1^2 + \alpha_2 f'(x_n) \right)\tau^2 + \left(\alpha_3 f'(x_n) + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \alpha_1^3 \frac{f'''(x_n)}{3!} \right)\tau^3 + \dots \equiv 0$$

Egalînd cu zero coeficienţii de pe lîngă puterile $\tau^i \ (i = 1, 2, 3, \cdots)$ determinăm valorile coeficienţilor α_i :

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{f''(x_n)}{2 f'(x_n)}, \quad \alpha_3 = \frac{f''^2(x_n)}{2 f'^2(x_n)} - \frac{f'''(x_n)}{6 f'(x_n)}, \quad \cdots \ . \tag{1.2.8}$$

Calculînd în aşa mod toţi coeficienţii α_i (în cazul convergenţei seriei (1.2.7) pentru valoarea τ_*) obţinem valoarea *exactă* a lui x_*, determinată de formula (1.2.7).

Limitîndu-ne cu un număr finit de termeni în descompunerea (1.2.7) deducem valoarea aproximativă a soluţiei ecuaţiei (1.2.1). În aproximaţia termenului liniar după τ obţinem rezultatul metodei lui Newton

$$x_{n+1} \approx x_n + \alpha_1 \tau = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ , \tag{1.2.9}$$

în timp ce limitarea cu termenul proporţional cu τ ne aduce la procedeul iterativ de tipul:

$$x_{n+1} \approx x_n + \tau_* - \frac{f''(x_n)}{2 f'(x_n)} \tau_*^2 = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2 f'(x_n)^3} \ . \tag{1.2.10}$$

Menţionăm că procedeul iterativ (1.2.10) pentru prima dată apare în lucrarea studenţească a lui Cebîşev [2].

Eficacitatea aplicării procedeelor iterative la rezolvarea ecuaţiilor neliniare va fi evidenţiată prin rapiditatea de convergenţă a soluţiei aproximative x_n spre soluţia exactă x_*. În acest scop introducem notaţia ε_n pentru devierea aproximaţiei x_n de la valoarea exactă x_*. Atunci $x_n = x_* + \varepsilon_n$, $x_{n+1} = x_* + \varepsilon_{n+1}$, $f(x_n) = f(x_* + \varepsilon_n)$, $f'(x_n) = f'(x_* + \varepsilon_n)$, $f''(x_n) = f''(x_* + \varepsilon_n)$. Înlocuind aceste aproximaţii în (1.2.9), (1.2.10) şi descompunînd expresiile obţinute în seria Taylor după puterile lui ε_n găsim relaţia între devierile ε_{n+1} şi ε_n:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}\varepsilon_n^2 \tag{1.2.11}$$

$$\varepsilon_{n+1} = C\varepsilon_n^3, \quad C = \frac{3f''^2(x_*) - f'''(x_*)f'(x_*)}{2f'^2(x_*)} . \tag{1.2.12}$$

Observăm că metoda lui Newton (1.2.9) are o convergenţă patratică spre soluţia exactă, în timp ce procedura iterativă (1.2.10) — cubică.

Metoda descrisă mai sus permite de a obţine procedeele iterative cu o rapiditate arbitrară de convergenţă fixată apriori (în prealabil).

Metoda iterativă. În metoda iterativă ecuaţia (1.2.1) este redusă la forma:

$$x = \varphi(x), \tag{1.2.13}$$

în aşa mod ca soluţiile ecuaţiilor (1.2.1) şi (1.2.13) să coincidă. În baza ecuaţiei (1.2.13) este construit procedeul iterativ.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1.2.14}$$

Dacă continuitatea numerică x_n converge şi $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci în conformitate cu (1.2.14) $x_* = \varphi(x_*)$ este soluţie a ecuaţiilor (1.2.13) şi (1.2.1).

Vom evidenţia condiţiile de convergenţă a procedeului iterativ (1.2.14) spre soluţia exactă x_*. În acest scop înlocuim în (1.2.14) expresiile $x_n = x_* + \varepsilon_n$, $x_{n+1} = x_* + \varepsilon_{n+1}$ şi determinăm relaţia dintre ε_{n+1} şi ε_n (ţinînd cont de egalitatea $x_* = \varphi(x_*)$):

$$\varepsilon_{n+1} \approx \varphi(x_*)\varepsilon . \tag{1.2.15}$$

Pentru procedeul iterativ convergent $\varepsilon_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Pe de altă parte expresia (1.2.15) descrie o progresie geometrică

$$\varepsilon_n = q^n \varepsilon_0 \ , \ q = \varphi'(x_*), \tag{1.2.16}$$

şi condiţia de convergenţă $\varepsilon_n \to 0$ cere ca

$$|q| = |\varphi'(x_*)| < 1. \tag{1.2.17}$$

Menţionăm că convergenţa procedeului iterativ (1.2.14) după cum urmează din (1.2.15) este liniară, în timp ce în metoda Newton este pătratică (1.2.11) şi cubică (1.2.12). Condiţia (1.2.17) descrie procedeul de transformare a ecuaţiei neliniare (1.2.1) la forma (1.2.13). Vom examina cîteva exemple concrete pentru a evidenţia eficacitatea procedeelor iterative, descrise mai sus.

Examinăm ecuaţia neliniară

$$f(x) = e^{-x} - x = 0, \ -\infty < x < \infty \ . \tag{1.2.18}$$

Dat fiind că $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ pentru toate valorile lui $x \in (-\infty, \infty)$, urmează că $f(x)$ este o funcţie monoton descrescătoare pe toată axa numerică. În acelaşi timp $f(-\infty) > 0$ şi $f(\infty) < 0$, şi, prin urmare, există o singură soluţie x_* a ecuaţiei (1.2.18) $(f(x_*) = 0)$. Soluţia numerică exactă a acestei ecuaţii este $x_* = 0.567143$. Evaluăm această soluţie utilizînd un pas al procedeului iterativ (1.2.10) sau (1.2.9) al metodei Newton. Pentru alegerea adecvată a aproximaţiei iniţiale x_0, menţionăm, că $f(0) = 1 > 0$, iar $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ şi, prin urmare, $x_* \in (0, 1)$. Pentru reducerea calculelor alegem $x_0 = 0$. În conformitate cu metoda ordinară a lui Newton (1.2.9) avem:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 \, .$$

Aplicarea formulei iterative (1.2.10) conduce la expresia:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(x_0) f^2(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} = 0.5625$$

apropiată de valoarea x_*.

Pentru rezolvarea aceleeaşi ecuaţii aplicăm metoda iterativă, prezentînd ecuaţia (1.2.18) sub forma

$$x = e^{-x} . \tag{1.2.19}$$

Dat fiind că $|q| = |-e^{-x}| = e^{-x} < 1$, pentru $x \in (0,1)$, procedeul iterativ $x_{n+1} = e^{-x_n}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) converge. În calitate de aproximaţie iniţială, ţinînd cont de analiza efectuată mai sus, vom lua $x_0 = 0.5$. Atunci $x_1 = e^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.60653$.

Să studiem acum problema rădăcinilor ecuaţiei

$$e^{-x} = tg\, x\,, \; -\infty < x < \infty. \tag{1.2.20}$$

Partea stîngă a acestei ecuaţii este o funcţie monoton descrescătoare pe toată axa numerică, iar partea dreaptă este o funcţie periodică cu perioada π, în aşa mod că în fiecare perioadă $(2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ monoton creşte de la $-\infty$ pînă la ∞, transformîndu-se în zero pentru $x_k = k\pi$.

Prin urmare în fiecare interval $\left((2k-1)\frac{\pi}{2},\, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ există o singură rădăcină a ecuaţiei studiate, iar ecuaţia (1.2.20) pe toată axa numerică $(-\infty, \infty)$ posedă un număr infinit (numărabil) de soluţii. Notăm cu x_*^k soluţia exactă a ecuaţiei (1.2.20) în intervalul $\left((2k-1)\frac{\pi}{2},\, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Pentru evaluarea aproximativă a rădăcinilor, menţionăm că în domeniul $x > 0$, $e^{-x} << 1$ pentru $x >> 1$ şi, prin urmare, $tg\, x_*^k << 1$, pentru $k >> 1$. Urmează că rădăcinile x_*^k în domeniul $x > 0$ pot fi reprezentate sub forma:

$$x_*^k = k\pi + \varepsilon_k, \quad k = 0,1,2,\ldots\ . \tag{1.2.21}$$

În domeniul $x < 0$ cu creşterea lui $|x|$ $e^{-x} >> 1$ şi trebuie să fie $tg\, x_*^k >> 1$ $(-k >> 1)$. În conformitate cu aceasta, rădăcinile x_*^k în domeniul $x < 0$ le prezentăm sub forma:

$$x_*^k = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_k\,, \varepsilon_k > 0 \;\; (k = -1, -2, \ldots)\,. \tag{1.2.22}$$

Ţinînd cont de (1.2.21) scriem ecuaţia (1.2.20) sub forma

$$e^{-k\pi - \varepsilon_k} = tg\,(k\pi + \varepsilon_k) = tg\,\varepsilon_k\,, \;\; k >> 0. \tag{1.2.23}$$

Pentru $k >> 1$, $e^{-k\pi} << 1$, $\varepsilon_k << 1$, $tg\,\varepsilon_k \approx \varepsilon_k$ şi din (1.2.23) obţinem expresia explicită pentru $\varepsilon_k \approx e^{k\pi}$ şi expresia aproximativă pentru x_*^k

$$x_*^k \approx k\pi + e^{-k\pi}, \; k > 0. \tag{1.2.24}$$

Expresia (1.2.24) este foarte eficace. Deacuma, pentru $k = 1$, ea conduce la rezultatul $x_*^1 \approx 3.1841$, în timp ce valoarea exactă a rădăcinei în acest domeniu $x_*^1 = 3.18303$. Cu creşterea lui k, exactitatea formulei (1.2.24) creşte exponenţial. Astfel, că pentru $k = 2$, $x_*^2 \approx 2\pi + e^{-2\pi} = 6.28505$ şi coincide cu valoarea exactă a rădăcinei din acest interval (cu exactitatea cifrelor scrise). Menţionăm, că reprezentarea asimptotică (1.2.24) pentru rădăcini este valabilă pentru toate rădăcinile cu $k > 0$.

Aplicăm în continuare metoda lui Newton pentru estimarea soluţiilor ecuaţiei (1.2.20) în domeniul $x > 0$. În calitate de aproximaţie iniţială,ţinînd cont de analiza efectuată mai sus, luăm $x_0^k = k\pi$. Atunci $f(x_0^k) = e^{-k\pi} - tg\, k\pi = e^{-k\pi}$, $f'(x_0^k) = -e^{-k\pi} - 1$ şi prima iteraţie după metoda Newton dă:

$$x_*^k \approx k\pi + \frac{e^{-k\pi}}{1 + e^{-k\pi}}, \quad k > 0. \qquad (1.2.25)$$

Reprezentarea (1.2.25) pentru rădăcinile ecuaţiei (1.2.20) este mai precisă decît reprezentarea (1.2.24). Astfel, deacuma pentru $k = 1$, calculul rădăcinii din formula (1.2.25) conduce la rezultatul $x_*^1 \approx 3.18301$, care practic coincide cu cel exact $x_*^1 = 3.18303$.

Pentru valorile negative a lui x, ecuaţia (1.2.20), ţinînd cont de (1.2.22), se transcrie sub forma

$$e^{(2k+1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_k} = ctg\, \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = 1, 2, \cdots . \qquad (1.2.26)$$

Dat fiind că pentru $k >> 1$, $\varepsilon_k << 1$, iar $ctg\, \varepsilon_k \approx \dfrac{1}{\varepsilon_k}$, din (1.2.26) urmeză $\varepsilon_k \approx e^{-(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ şi deci:

$$x_*^k \approx -(2k+1)\frac{\pi}{2} - e^{-(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (1.2.27)$$

Formula (1.2.27) este destul de eficace pentru reprezentarea soluţiilor ecuaţiei (1.2.20) în domeniul $x < 0$. Pentru $k = 0$, $x_*^0 \approx -\dfrac{\pi}{2} - e^{-\pi/2} = -1.77868$, în timp ce valoarea exactă a rădăcinei $x_*^0 = -1.74389$. Pentru $k = 1$ $x_*^1 = -\dfrac{3\pi}{2} - e^{-\frac{3\pi}{2}} = \quad = -4.72137$, iar valoarea exactă a rădăcinei x_*^1 coincide cu soluţia aproximativă. În consecinţă, expresia (1.2.27) poate (pentru $k \geq 1$) servi drept reprezentare analitică pentru rădăcinile ecuaţiei (1.2.26), şi cu creşterea lui k precizia reprezentării creşte exponenţial.