1.3. Metodele analizei asimptotice a soluţiilor ecuaţiilor neliniare cu parametru

Analiza problemelor fizice în multe cazuri conduce la necesitatea rezolvării ecuaţiilor neliniare de tipul:

$$f(x,\gamma)=0\,, \tag{1.3.1}$$

unde γ este parametrul problemei, x - variabila independentă, $f(x,\gamma)$ este o funcţie definită de argumentele x,γ. Ne vom limita în continuare cu cazul cînd $f(x,\gamma)$ este o funcţie scalară de argumentele scalare x,γ.

Pentru valoarea fixată a parametrului γ, ecuaţia (1.3.1) poate fi rezolvată aplicînd metodele numerice de rezolvare a ecuaţiilor transcendente, spre exemplu, metodele Newton descrise în § 1.1. Dar un interes aparte prezintă determinarea dependenţei $x(\gamma)$, definită de ecuaţia (1.3.1). Această împrejurare într-o mare măsură separă problema determinării soluţiilor ecuaţiei (1.3.1) de cea obişnuită de determinare a rădăcinilor ecuaţiei neliniare de tipul $f(x)=0$. Prezenţa parametrului în ecuaţia neliniară include în studierea soluţiilor acestor ecuaţii o diversitate mare a direcţiilor analizei. Printre ele sunt: evidenţierea caracterului soluţiei $x(\gamma)$ şi comportarea ei calitativă (proprietăţile analitice, prezenţa valorilor extremale etc.) şi studierea comportării reciproce a funcţiilor $x_i(\gamma)$ în cazul existenţei mai multor soluţii, în particular, posibilitatea intersecţiei graficelor funcţiilor $x_i(\gamma)$ şi $x_j(\gamma)$ $(i\neq j)$; evidenţierea condiţiilor apariţiei soluţiilor noi. Aceste probleme pentru analiză îşi găsesc un domeniu amplu de aplicaţii la rezolvarea problemelor fizice şi ar putea servi drept fundament pentru formularea unor probleme matematice cu un conţinut larg.

În continuare vom descrie metodele de obţinere a dependenţelor $x(\gamma)$, definite de ecuaţia (1.3.1), în formă analitică. În tote cazurile examinate în continuare, convenim că $x(\gamma)$ este o ramură izolată, adică, că dependenţele $x_i(\gamma)$ şi $x_j(\gamma)$, corespunzătoare diferitor soluţii a ecuaţiei (1.3.1) (în cazul prezenţei lor) nu se intersectează în intervalul dat de variere a parametrului γ. O cale mai generală pentru obţinerea dependenţelor $x(\gamma)$ sub formă analitică este aplicarea teoremei funcţiilor implicite. Convenim că (1.3.1) defineşte funcţia $x(\gamma)$ în mod explicit.

Fie $\gamma=\gamma_0$ valoarea finală fixată a parametrului γ. Construim dependenţa in vecinătatea valorii $x(\gamma)$, admiţînd că în această vecinătate condiţiile teoremei funcţiilor implicite sunt satisfăcute: $f'_x\neq 0$ pentru $\gamma=\gamma_0$, $f(x_0,\gamma_0)=0$ şi există derivatele parţiale $\partial^n f/\partial x^{n-k}\partial\gamma^k$ pînă la ordinul n inclusiv. Atunci dependenţa $x(\gamma)$ în vecinătatea $\gamma=\gamma_0$ poate fi reprezentată sub formă de serie de puteri:

$$x(\gamma)=x_0+\alpha_1(\gamma-\gamma_0)+\alpha_2(\gamma-\gamma_0)^2+...+\alpha_n(\gamma-\gamma_0)^n+R_n\,, \tag{1.3.2}$$

unde α_i $(i = 1,2,..., n)$ sunt coeficienţi necunoscuţi, R_n-restul de ordinul n de la descompunerea soluţiei $x(\gamma)$ în serie.

Procedeul de obţinere a coeficienţilor α_i este detaliat descris în paragraful 1.1. În particular, cînd $\gamma_0 = 0$, reprezentarea (1.3.2) capătă forma:

$$x(\gamma) = x_0 + \alpha_1\gamma + \alpha_2\gamma^2 + ... + R_n \quad . \tag{1.3.3}$$

În acest caz se spune că γ este un *parametru mic* al problemei, iar (1.3.3) este descompunerea dependenţei $x(\gamma)$ în serie de puteri după puterile acestui parametru mic.

La analiza problemelor fizice este natural şi cazul, cînd $\gamma_0 = \infty$. Fie $x(\infty) = x_0$ şi fie că ecuaţia (1.3.1) este satisfăcută de aceste valori, adică

$$f(x(\infty),\infty) = 0. \tag{1.3.4}$$

Construim dependenţa $x(\gamma)$ în vecinătatea valorii $\gamma_0 = \infty$, adică în vecinătatea punctului infinit. În acest scop introducem un parametru nou $\varepsilon = \frac{1}{\gamma}$ şi vom studia funcţia $x(\gamma)$ ca o funcţie dependentă de parametrul ε. În acest caz valorii $\gamma = \infty$ îi corespunde valoarea $\varepsilon = 0$, iar ecuaţia (1.3.1) se aduce la forma echivalentă:

$$F(x,\varepsilon) = 0 \tag{1.3.5}$$

cu condiţia că $x(\gamma = \infty) = x(\varepsilon = 0) = x_0$ este finită. Dacă pentru $\gamma \to \infty$ $(\varepsilon \to 0)$ soluţia $x(\gamma)$ se transformă în infinit, este comod de trecut la o funcţie nouă $u(\gamma) = 1/x(\gamma)$ şi de reprezentat ecuaţia (1.3.1) în variabilele noi u, ε sub forma echivalentă

$$\Phi(u,\varepsilon) = 0 . \tag{1.3.6}$$

În acest caz valorii $x(\infty) = \infty$ îi corespunde valoarea $u(\varepsilon = 0) = 0$, iar condiţiei $f(x(\infty),\infty) = 0$ - egalitatea $\Phi(0,0) = 0$.

Dacă condiţiile teoremei funcţiei implicite $x(\varepsilon)$, definită de ecuaţia (1.3.5) şi funcţiei $x(\varepsilon)$, definită de ecuaţia (1.3.6) sunt satisfăcute, atunci funcţiile $x(\varepsilon)$ şi $u(\varepsilon)$ au următoarele reprezentări:

$$x(\varepsilon) = x_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + ... + \alpha_n\varepsilon^n + R_n \tag{1.3.7}$$

şi

$$u(\varepsilon) = \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + ... + \beta_m\varepsilon^m + R'_m . \tag{1.3.8}$$

În variabilele iniţiale x, γ funcţia $x(\gamma)$ în vecinătatea valorii parametrului $\gamma = \infty$ capătă forma:

$$x(\gamma) = x(\infty) + \frac{\alpha_1}{\gamma} + \frac{\alpha_2}{\gamma^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\gamma^n} + R_n \tag{1.3.9}$$

pentru cazul cînd $x(\infty)$ este finită, şi

$$x(\gamma) = \frac{\gamma}{\beta_1 + \frac{\beta_2}{\gamma} + \ldots + \frac{\beta_m}{\gamma^{m-1}} + R'_m} \tag{1.3.10}$$

pentru cazul cînd $x(\infty)$ tinde la infinit.

Dependenţa (1.3.10) este valabilă pentru $\beta_1 \neq 0$. Dacă $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$, iar $\beta_k \neq 0$, atunci reprezentarea asimptotică pentru funcţia $x(\gamma)$ poate fi scrisă sub forma:

$$x(\gamma) = \frac{\gamma^k}{\beta_k + \frac{\beta_{k+1}}{\gamma} + \ldots + \frac{\beta_m}{\gamma^{m-k}} + R'_m} \; . \tag{1.3.11}$$

Reprezentările analitice pentru funcţiile $x(\gamma)$, definite de ecuaţia (1.3.1), pot fi obţinute şi prin metodele lui Newton şi iterative pentru rezolvarea ecuaţiilor transcendente. Aceste procedee de iteraţie au fost analizate detaliat în paragraful precedent. Aici vom scrie numai forma finală a rezultatelor obţinute prin metoda lui Newton (1.2.9) şi iteraţiilor (1.2.14).

Aplicînd metoda Newton, avem:

$$x_{n+1}(\gamma) = x_n(\gamma) - \frac{f(x_n(\gamma), \gamma)}{f'(x(\gamma), \gamma)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \; . \tag{1.3.12}$$

În metoda iteraţiilor

$$x_{n+1}(\gamma) = \varphi(x_n(\gamma)), \quad n = 0,1,2,\ldots \; . \tag{1.3.13}$$

Condiţiile de aplicare a procedeelor iteraţiilor: $f'_x(x(\gamma), \gamma) \neq 0$ pentru metoda lui Newton şi $|\varphi(x(\gamma), \gamma)| < 1$ pentru metoda iteraţiilor trebuie să fie satisfăcute în tot domeniul de variere a parametrului γ.

Menţionăm că relaţiile (1.3.12) şi (1.3.13) permit determinarea reprezentărilor analitice pentru o clasă mai largă de funcţii $x(\gamma)$ în comparaţie cu dependenţele (1.3.2), (1.3.9) şi (1.3.11), obţinute în baza teoremei despre existenţa funcţiei inverse.

Dar, în cazurile cînd condiţiile acestei teoreme nu sunt satisfăcute, dependenţele $x(\gamma)$, obţinute aplicînd procedeele (1.3.12), (1.3.13) coincid cu dependenţele determinate de (1.3.2), (1.3.9) şi (1.3.11).

Să scriem aici şi derivata $dx(\gamma)/d\gamma$, care permite într-un şir de cazuri de a face concluzii principiale despre comportarea calitativă a soluţiei $x(\gamma)$. Avem, utilizînd definiţia (I.3.1)

$$\frac{dx}{d\gamma} = -\frac{\partial f(x,\gamma)/\partial \gamma}{\partial f(x,\gamma)/\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,\gamma)}{\partial x} \neq 0. \tag{1.3.14}$$

Aplicăm procedeele descrise pentru analiza asimptotică a soluţiilor ecuaţiei algebrice

$$x^3 + \gamma x + 1 = 0, \gamma \geq 0 \tag{1.3.15}$$

şi ecuaţiei transcendente

$$xe^x = \gamma, \quad \gamma \geq 0. \tag{1.3.16}$$

Dacă $x(\gamma)$ este o soluţie a ecuaţiei (1.3.15), atunci $x(\gamma) < 0$ pentru toate valorile parametrului $\gamma > 0$, fiindcă pentru $x(\gamma) > 0$ este imposibil de transformat în zero partea stîngă a ecuaţiei (1.3.15). Pe de altă parte, în conformitate cu (1.3.14) avem:

$$\frac{dx}{d\gamma} = -\frac{x(\gamma)}{3x^2(\gamma) + \gamma} \tag{I.3.17}$$

şi fiindcă $x(\gamma) < 0$, iar $\partial f(x,\gamma)/\partial x > 0$ pentru $\gamma \geq 0$, urmează că $dx/d\gamma > 0$, deci $x(\gamma)$ este monoton crescătoare în domeniul $\gamma \geq 0$. Fiindcă $\partial f(x,\gamma)/\partial x \neq 0$ pentru toate valorile $\gamma \geq 0$, urmează că există funcţia reală univocă $x(\gamma)$. Ţinînd cont de existenţă soluţie sub formă de ecuaţie diferenţială (1.3.17) şi condiţia $x(0) = -1$, urmează că această soluţie este şi unică.

Vom determina expresiile asimptotice pentru soluţia $x(\gamma)$ în domeniul valorilor mici ($\gamma << 1$) şi mari ($\gamma >> 1$) ale parametrului γ. Pentru valorile mici ($\gamma << 1$) printr-o verificare simplă ne încredinţăm, că toate condiţiile de existenţă a funcţiei analitice $x(\gamma)$, definite de ecuaţia (1.3.15) sunt satisfăcute, adică $f(-1,0) = 0$, $f'_x(-1,0) = 3 \neq 0$ şi toate derivatele parţiale $\partial^n f(x,\gamma)/\partial x^{n-k}\partial \gamma^k$ $(n = 0,1,2,...)$ pentru $x_0 = -1$ şi $\gamma = 0$ există şi sunt finite .Prin urmare, soluţia $x(\gamma)$ poate fi căutată sub forma :

$$x(\gamma) = -1 + c_1\gamma + c_2\gamma^2 + ... \; . \tag{1.3.18}$$

Înlocuind (1.3.18) în (1.3.15) o transformăm într-o identitate în raport cu parametrul γ:

$$(-1+c_1\gamma+c_2\gamma^2+\dots\quad)^3+\gamma(-1+c_1\gamma+c_2\gamma^2+\dots\quad)+1=0$$

sau

$$(-1+1)+(3c_1-1)\gamma+\left(3(c_2-c_1^2)+c_1\right)\gamma^2+\dots=0\,,$$

de unde $c_1=\frac{1}{2},\ c_2=0,\ c_3=-\frac{1}{81},\dots$ şi reprezentarea asimptotică pentru soluţia ecuaţiei (1.3.15) capătă forma:

$$x(\gamma)\approx -1+\frac{\gamma}{3}-\frac{\gamma^3}{81}+\dots,\quad \gamma\ll 1. \tag{1.3.19}$$

Pentru a obţine dependenţa $x(\gamma)$ definită de ecuaţia (1.3.15) aplicăm metoda lui Newton (1.3.12), luînd în calitate de aproximaţie iniţială $x_0(\gamma)\equiv -1$.

În conformitate cu (1.3.12) putem scrie:

$$x_1(\gamma)=x_0(\gamma)-\frac{f(x_0(\gamma),\gamma)}{f_x'(x_0(\gamma),\gamma)}=-1-\frac{-\gamma}{3+\gamma}=-1+\frac{\gamma/3}{1+\gamma/3}.$$

Al doilea pas al metodei lui Newton ne conduce la expresia:

$$x_2(\gamma)=x_1(\gamma)-\frac{f(x_1(\gamma),\gamma)}{f_x'(x_1(\gamma),\gamma)}=-\frac{1+\gamma/3+\gamma^2/9+\gamma^3/81}{1+2\gamma/3+\gamma^2/3+\gamma^3/9+\gamma^4/81}. \tag{1.3.20}$$

Printr-o simplă verificare ne putem convinge, că descompunerea (1.3.20) după puterile lui γ se reduce la expresia care coincide cu (1.3.19) pînă în a treia componentă inclusiv. Tot odată menţionăm că (1.3.20) prezintă o aproximaţie mai exactă pentru soluţie decît (1.3.19).

Soluţia sub forma (1.3.20) poate fi tratată ca o metodă regulară de aproximare a funcţiei $x(\gamma)$ cu ajutorul funcţiilor raţionale, în timp ce (1.3.19) reprezintă aproximarea funcţiei $x(\gamma)$ printr-o serie de puteri.

Precizia reprezentării soluţiei (1.3.20) poate fi ameliorată efectuînd iteraţiile următoare. În acest caz volumul calculelor creşte semnificativ. Din această cauză pentru realizarea iteraţiilor următoare este oportun de aplicat programele computerizate,care realizează calcule simbolice cu ajutorul pachetelor "Matematica" sau „MATLAB".

Vom deduce reprezentarea analitică a soluţiei $x(\gamma)$ în domeniul valorilor mici ale parametrului γ, aplicînd procedeul de iteraţie din metoda iterativă (1.3.13).În acest scop reprezentăm ecuaţia (I.3.15) sub forma:

$$x=-\sqrt[3]{1+\gamma x} \tag{1.3.21}$$

şi construim procedeul de iteraţie

$$x_{n+1} = -\sqrt[3]{1+\gamma x_n(\gamma)}\,. \tag{1.3.22}$$

Dat fiind că

$$\left|\left(-\sqrt[3]{1+\gamma x_n(\gamma)}\right)'\right| = \frac{\gamma}{3\sqrt[3]{(1+\gamma x_n(\gamma))^2}} < 1,$$

pentru $\gamma << 1$, procedeul de iteraţie (1.3.22) se reduce la rezolvarea ecuaţiei (1.3.21) şi, prin urmare, la rezolvarea ecuaţiei (1.3.15).

În particular, luînd drept aproximaţie iniţială $x_0(\gamma) \equiv -1$, în conformitate cu (1.3.22) avem:

$$x_1(\gamma) = -\sqrt[3]{1+\gamma x_0(\gamma)} = -\sqrt[3]{1-\gamma} \approx -1 + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma^2}{9} + \ldots\,.$$

A doua iteraţie în (1.3.22) ne conduce la expresia:

$$x_2(\gamma) = -\sqrt[3]{1+\gamma x_1(\gamma)} = -\sqrt[3]{1-\gamma\sqrt[3]{1-\gamma}}\,. \tag{1.3.23}$$

Descompunînd partea dreaptă a expresiei (1.3.23) în serie după puterile lui γ, obţinem reprezentarea funcţiei $x(\gamma)$ pentru $\gamma << 1$:

$$x_2(\gamma) \approx -1 + \frac{\gamma}{3} - \frac{\gamma^3}{81} + \ldots, \tag{1.3.24}$$

care coincide cu (I.3.19) pînă la termenii de ordinul trei după puterile lui γ.

Să deducem în continuare reprezentarea asimptotică a soluţiei ecuaţiei (1.3.15) pentru valori mari ale parametrului γ $(\gamma >> 1)$. În acest scop introducem în ecuaţia (1.3.15) un parametru nou $\varepsilon = \frac{1}{\gamma}$. Împărţind ambele părţi ale ecuaţiei la γ, obţinem:

$$x + \varepsilon x^3 + \varepsilon = 0, \quad \varepsilon << 1. \tag{1.3.25}$$

Convenim că (1.3.25) este definiţia funcţiei implicite $x(\varepsilon)$, care satisface ecuaţia $f(x,\varepsilon) = 0$, unde $f(x,\varepsilon) = x + \varepsilon x^3 + \varepsilon$. Notăm prin $x(\infty)$ valoarea rădăcinei (1.3.25), care corespunde valorii parametrului $\varepsilon = 0$ $(\gamma = \infty)$. Pentru a obţine valoarea $x(\infty)$ trecem la limită în ecuaţia (1.3.25) cînd ε tinde spre zero şi scriem:

$$x(0) + 0\,x^3(0) = 0\,, \tag{1.3.26}$$

unde $0\,x^3(0) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\, x^3(\varepsilon)$. Din (1.3.26) obţinem, că pentru $\varepsilon \to 0$, unica soluţie a ecuaţiei (1.3.26) în domeniul real este $x(\infty) = 0$, şi deci $f(0,0) = 0$.

Dat fiind că $f_x'(0,0) = 1 \neq 0$, şi toate derivatele parţiale $\partial^n f / \partial x^{n-k} \partial \varepsilon^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) în punctul $x = 0,\ \varepsilon = 0$ pentru toţi $n = 1, 2, 3, \ldots$ există şi sunt finite, în conformitate cu teorema funcţiei implicite $x(\varepsilon)$ este o funcţie analitică de parametrul ε, sau

$$x(\varepsilon) = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \ldots \ . \tag{1.3.27}$$

Înlocuind (1.3.22) în (1.3.25) determinăm coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ şi scriem funcţia $x(\varepsilon)$:

$$x(\varepsilon) = -\varepsilon + \varepsilon^4 + \ldots, \quad \varepsilon << 1, \tag{1.3.28}$$

sau

$$x(\gamma) = -\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^4} + \cdots, \quad \gamma >> 1. \tag{1.3.29}$$

Menţionăm, că în partea dreaptă a expresiei (1.3.29) lipsesc termenii cu $1/\gamma^2$ şi $1/\gamma^3$, şi din această cauză pentru $\gamma >> 1$, expresia $x(\gamma) \approx -1/\gamma$ exprimă reprezentarea pentru soluţie cu o precizie de un grad înalt.

Să aplicăm acuma procedeul de iteraţie a metodei Newton pentru a căpăta soluţia ecuaţiei (1.3.25). Alegem drept aproximaţie iniţială $x_0(\varepsilon = 0) = x(\infty) = 0$. În conformitate cu (1.3.12) pentru primele două iteraţii avem:

$$x_1(\varepsilon) = x_0(\varepsilon) - \frac{f(x_0(\varepsilon), \varepsilon)}{f_x'(x_0(\varepsilon), \varepsilon)} = -\varepsilon, \quad x_2(\varepsilon) = x_1(\varepsilon) - \frac{f(x_1(\varepsilon), \varepsilon)}{f_x'(x_1(\varepsilon), \varepsilon)} = -\frac{1+2\varepsilon^3}{1+3\varepsilon^3}\varepsilon.\,. \tag{1.3.30}$$

Limitîndu-ne cu iteraţia a doua şi revenind la parametrul γ, avem:

$$x(\gamma) \approx \frac{1+2/\gamma^3}{1+3/\gamma^3}\,\frac{1}{\gamma}, \quad \gamma >> 1. \tag{1.3.31}$$

Descompunerea (1.3.31) în serie după puterile lui $1/\gamma$ ne conduce la expresia care coincide cu reprezentarea (1.3.29) pînă la termenii proporţionali cu $\sim 1/\gamma^6$.

Prezintă interes de a compara reprezentarea asimptotică a soluţiei ecuaţiei (1.3.15) pentru valori mari ale parametrului γ cu reprezentarea (1.3.20) obţinută prin iteraţia de ordinul doi în metoda Newton fără a limita valorile lui γ. Trecînd la limită în (1.3.20) pentru valori mari ale lui γ, obţinem reprezentarea asimptotică pentru $x_2(\gamma)$:

$$x_2(\gamma) \approx -\frac{1}{\gamma} - \frac{27}{\gamma^3} + \cdots \ , \quad \gamma >> 1. \tag{1.3.32}$$

În consecinţă, expresia (1.3.20) atît pentru $\gamma << 1$, cît şi pentru $\gamma >> 1$ reprezintă asimptotica soluţiei ecuaţiei (1.3.15), în timp ce (1.3.19) şi (1.3.29) sunt valabile numai pentru valorile $\gamma << 1$ şi $\gamma >> 1$ respective. Acest exemplu concret este o reflectare a afirmaţiei generale, că aproximaţia funcţiilor prin funcţii raţionale este mai eficace decît aproximaţia prin polinoame .

În continuare, aplicăm metoda iterativă pentru determinarea soluţiei ecuaţiei (1.3.25), reprezentînd-o sub forma:

$$x = -(x^3 + 1)\varepsilon \tag{1.3.33}$$

şi aplicăm procedeul de iteraţie

$$x_{n+1}(\varepsilon) = -(x_n^3(\varepsilon) + 1)\varepsilon \, . \tag{1.3.34}$$

Dat fiind, că $\left| -(x^3 + 1)'\varepsilon \right| = 3x^2\varepsilon < 1$ pentru $\varepsilon << 1$, procedeul de iteraţie (1.3.34) este convergent.

Alegem în calitate de aproximaţie iniţială $x_0(\varepsilon) = -\varepsilon_{\pm}$ şi ne limităm cu prima iteraţie. Avem $x_1(\varepsilon) = -(1 - \varepsilon^3)\varepsilon = -\varepsilon + \varepsilon^4$, sau, revenind la parametrul γ, obţinem reprezentarea asimptotică pentru soluţie:

$$x(\gamma) \approx -\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^4} + \cdots \tag{1.3.35}$$

care coincide (natural) cu descompunerea (1.3.29). Vom scrie aici (pentru informa-ţie) şi reprezentarea pentru rădăcina reală a ecuaţiei cubice (1.3.15) obţinută din formula lui Cardano [3].

$$x(\gamma) = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\gamma^3}{27}} - \frac{1}{2}} \; - \; \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\gamma^3}{27}} + \frac{1}{2}} \ . \tag{I.3.36}$$

Expresia (1.3.36) este soluţia $x(\gamma)$ pentru orice valoare a lui γ. În particular pentru $\gamma << 1$, descompunînd partea dreaptă (1.3.36) în serie după puterile lui γ, obţinem reprezentarea (1.3.19). Pentru $\gamma >> 1$ descompunerea expresiei (1.3.36) în serie după puterile lui $\frac{1}{\gamma}$, coincide cu reprezentarea (1.3.29).

După cum s-a menţionat mai sus expresia aproximativă (1.3.20) pentru $x(\gamma)$, determinată prin metoda lui Newton în ambele cazuri limite ($\gamma << 1$ şi $\gamma >> 1$) coincide cu cea exactă. Vom estima eficacitatea metodei lui Newton pentru valori intermediare ale parametrului γ. În acest scop, calculăm valorile lui $x(\gamma)$ după formulele (1.3.20) şi (1.3.36) pentru $\gamma = 3$. În rezultatul calculelor obţinem: $x_2(3) = -0.33333$ după formula (I.3.20) şi $x_2(3) = -0.32218$ după formula (1.3.36). Deci iteraţia a doua în metoda lui Newton dă valori apropiate de cea exactă în intervalul de variere a parametrului $\gamma \in (0,\infty)$, rezultat irealizabil prin aproximarea soluţiei $x(\gamma)$ cu seria de puteri.

Revenim acuma la analiza soluţiei $x(\gamma)$ a ecuaţiei transcendente (1.3.16). Specificul acestui exemplu constă în faptul că, după cum vom vedea din expunerea de mai departe, ecuaţia (1.3.16) spre deosebire de (1.3.15) în domeniul valorilor parametrului $\gamma >> 1$ nu mai determină o funcţie analitică şi în consecinţă, căutarea soluţiei $x(\gamma)$ sub forma descompunerii (1.3.10) este inadmisibilă.

Convenim că (1.3.16) este definiţia funcţiei $x(\gamma)$:

$$f(x,\gamma) = xe^x - \gamma = 0, \quad \gamma \geq 0. \tag{1.3.37}$$

Pentru valorile pozitive ale parametrului γ, funcţia $x(\gamma)$ este pozitivă, în aşa mod că pentru $\gamma = 0,\ x = 0$, iar $\partial f(x,\gamma)/\partial x = e^x(1+x) > 0$ pentru toate valorile $x \geq 0$.
În particular, pentru $x = 0$, $\partial f/\partial x = 1 \neq 0$. În consecinţă în intervalul $\gamma \in (0,\infty)$ ecuaţia (I.3.37) defineşte o funcţie univocă. Pe de altă parte, în conformitate cu (1.3.14)

$$\frac{dx}{d\gamma} = -\frac{-1}{e^x(1+x)} = \frac{e^{-x}}{1+x} > 0$$

şi, deci, $x(\gamma)$ este o funcţie monoton crescătoare. În rezultat obţinem, că ecuaţia (1.3.37) pentru $\gamma \geq 0$ defineşte o funcţie $x(\gamma)$ pozitivă şi monoton crescătoare, avînd valoarea zero ($x(0) = 0$) în punctul zero şi transformîndu-se în infinit pentru $\gamma >> 1$. Ultima afirmaţie urmează, spre exemplu, din reprezentarea grafică a ecuaţiei (1.3.16).

Dat fiind că în punctul $(0,0)$, $f'_x(0,0) = 1 \neq 0$, şi toate derivatele de ordin superior $\partial^n f(0,0)/\partial x^{n-k}\partial\gamma^k \quad (n = 1,2,..$ în acelaşi punct există şi sunt finite; ecuaţia (1.3.37) deter-mină funcţia $x(\gamma)$ analitică în vecinătatea valorii $\gamma = 0$ şi poate fi reprezentată sub forma:

$$x(\gamma) = c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \dots\ .$$

Coeficienţii $c_1, c_2, \dots$ se calculează prin metodele expuse mai sus: $c_1 = 1,\ c_2 = -1, \dots$ şi

$$x(\gamma) \approx \gamma - \gamma^2 + \dots, \quad \gamma << 1. \tag{1.3.38}$$

Aplicăm, în continuare procedeul de iteraţie al metodei lui Newton (1.3.12) pentru determinarea funcţiei $x(\gamma)$, alegînd drept aproximaţie iniţială $x_0(\gamma) = \gamma$. Avem

$$x_1(\gamma) = \gamma - \frac{\gamma e^\gamma - \gamma}{e^\gamma(1+\gamma)} = \frac{\gamma + e^{-\gamma}}{1+\gamma} \cdot \gamma . \qquad (1.3.39)$$

Pentru $\gamma << 1$, descompunerea (1.3.39) după puterile lui γ coincide cu descompunerea (1.3.38), iar pentru $\gamma >> 1$, $x_1(\gamma) \approx \gamma$, care confirmă calitativ afirmaţia, că soluţia exactă $x(\gamma) >> 1$ pentru $\gamma >> 1$.

Cu mărirea numărului de iteraţii expresiile $x_2(\gamma), x_3(\gamma), \ldots$ dau tot mai exacte reprezentări analitice pentru soluţia $x(\gamma)$ pentru intervale tot mai mari a valorilor parametrului γ.

Vom construi în continuare procedeul de iteraţie pentru determinarea soluţiei $x(\gamma)$ sub forma de expresie analitică prin metoda iteraţiilor (1.3.13). Reprezentăm ecuaţia (1.3.16) sub forma echivalentă:

$$x = \gamma e^{-x}, \quad \gamma > 0 \qquad (1.3.40)$$

şi aplicăm procedeul de iteraţie:

$$x_{n+1}(\gamma) = \gamma e^{-x_n(\gamma)} \quad (n = 0,1,2,....), \quad \gamma > 0 . \qquad (1.3.41)$$

Dat fiind că $\left|\frac{d}{dx}(\gamma e^{-x})\right| = \gamma e^{-x}$, urmează că (1.3.41) converge pentru $\gamma \cdot e^{-x} < 1$. Fie $x_0(\gamma) = \gamma$. Atunci, În conformitate cu (1.3.41) obţinem

$$x_1(\gamma) = \gamma e^{-\gamma} . \qquad (1.3.42)$$

Pentru $\gamma << 1$ din (1.3.42) avem:

$$x_1(\gamma) \approx \gamma - \gamma^2 + \ldots .$$

Calculul funcţiei $x(\gamma)$ pentru $\gamma = 1$, după formulele (1.3.39) şi (1.3.42) dau următoarele rezultate: 0.68394 şi 0.367879 respectiv, în timp ce soluţia exactă a ecuaţiei (1.3.16) este $x(\gamma = 1) = 0.567143$.

Vom analiza în continuare comportarea soluţiei ecuaţiei (1.3.16) pentru valori mari ale parametrului γ $(\gamma >> 1)$. În acest scop întroducem parametrul mic $\varepsilon = \frac{1}{\gamma} << 1$ şi funcţia $u(\varepsilon) = \frac{1}{x(\gamma)} << 1$ pentru $\gamma >> 1$. Ecuaţia (1.3.16) capătă forma:

$$f(u,\varepsilon) = u(\varepsilon) - \varepsilon e^{\frac{1}{u(\varepsilon)}} = 0 , \quad \varepsilon << 1 . \qquad (1.3.43)$$

Menţionăm că $u(0)=0$, fiindcă $x(\gamma)\to\infty$ cînd $\gamma\to\infty$. Convenim că ecuaţia (1.3.43) defineşte formă implicită a funcţiei $u(\varepsilon)$ în vecinătatea valorii $\varepsilon=0$. Dat fiind că $\partial f/\partial u=(1+u)/u$ şi $\partial u/\partial\varepsilon=-\dfrac{\partial f/\partial\varepsilon}{\partial f/\partial u}=\dfrac{u\,e^{1/u}}{1+u}$ se transformă în infinit cînd $\varepsilon\to 0$, urmează că şi toate derivatele de ordin superior $d^n u/d\varepsilon^n$ la fel se transformă în infinit în punctul $\varepsilon=0$. În acest caz $u(\varepsilon)$ nu este o funcţie analitică de argumentul ε în vecinătatea valorii $\varepsilon=0$ şi deci, $u(\varepsilon)$ nu poate fi reprezentată prin seria de puteri de tipul (1.3.7) în raport cu ε sau (1.3.9) în raport cu parametrul γ. În aceste condiţii să transformăm (1.3.16) la o formă echivalentă, care permite aplicarea procedeelor de iteraţie a metodei lui Newton şi cea iterativă. În acest scop logaritmăm ambele părţi ale ecuaţiei (1.3.16) şi o reprezentăm în formă echivalentă.

$$x+\ln x=\ln\gamma. \qquad (1.3.44)$$

Dat fiind că pentru $\gamma>>1$, $x(\gamma)>>1$, iar $x>>\ln x$ pentru $x>>1$, vom alege drept aproximaţie zero, valoarea $x_0(\gamma)=\ln\gamma$.

Prima iteraţie în metoda lui Newton ne dă reprezentarea asimptotică pentru soluţia $x(\gamma)$ pentru $\gamma>>1$.

$$x_1(\gamma)=x_0(\gamma)-\frac{f(x_0(\gamma),\gamma)}{f'_x(x_0(\gamma),\gamma)}=\ln\gamma-\frac{\ln\ln\gamma}{1+1/\ln\gamma}\,,\quad \gamma>>1. \qquad (1.3.45)$$

Prima iteraţie în metoda iterativă ne conduce la expresia

$$x_1(\gamma)=\ln\gamma-\ln x_0(\gamma)=\ln\gamma-\ln\ln\gamma\,,\quad \gamma>>1. \qquad (1.3.46)$$

Remarcăm, că metoda iteraţiilor este valabilă fiindcă $\varphi'_x=\dfrac{1}{x}<<1$ pentru $\gamma>>1$ şi, deci, condiţia de convergenţă a metodei iterative este satisfăcută. Reprezentările analitice (1.3.45) şi (1.3.46) pentru soluţia $x(\gamma)$ pot fi precizate calculînd iteraţiile următoare. Este necesar de menţionat în mod special, că în cazul cînd reprezentarea soluţiei căutate $x(\gamma)$ sub formă de serie de puteri întregi după parametru nu există, metoda lui Newton şi iterativă permit obţinerea procedeelor de iteraţie pentru construirea dependenţelor analitice $x_n(\gamma)$ $(n=0,1,2,...)$ convergente spre soluţia exactă.

În consecinţă, aceste metode sunt aplicabile pentru determinarea soluţiilor pentru o clasă mai vastă de ecuaţii $f(x,\gamma)=0$ comparativ cu clasa de ecuaţii,care permit numai soluţii analitice $x(\gamma)$.

În acelaţi timp,dacă soluţia căutată $x(\gamma)$ este o funcţie analitică,atunci toate metodele studiate mai sus conduc la unul şi acelaţi rezultat în domeniul de convergenţă a reprezentărilor analitice pentru $x(\gamma)$.Totodată este necesar de menţionat că expresiile analitice pentru $x(\gamma)$,determinate prin metodele iterative prezintă,ca regulă, funcţii raţionale sau alte funcţii de parametrul γ. Ele aproximează soluţia exactă $x(\gamma)$ într-un domeniu mai vast de variere a parametrului γ decît reprezentarea soluţiei sub formă de serie de puteri după parametrul γ.