1.4. Bifurcaţia soluţiilor ecuaţiilor neliniare

În paragrafele precedente ale acestui capitol noi am analizat detaliat dependenţa soluţiei $x(\gamma)$ a ecuaţiei neliniare

$$f(x,\gamma)=0 \tag{1.4.1}$$

de parametrul γ în vecinătatea unei valori fixate $\gamma=\gamma_0$. Dacă sunt satisfăcute condiţiile

$$\frac{\partial f(x,\gamma)}{\partial x}=0 \text{ şi } f(x,\gamma)=0 \text{ pentru } x=x_0 \text{ şi } \gamma=\gamma_0 \tag{1.4.2}$$

atunci s-a demonstrat că în vecinătatea valorii $\gamma=\gamma_0$ există funcţia continuă şi univocă $x(\gamma)$ aşa că $x_0=x(\gamma_0)$.

În problemele de fizică un rol important are, cu toate acestea, evidenţierea condiţiilor în care sunt posibile apariţia mai multor soluţii pentru careva valoare a parametrului $\gamma=\gamma_*$. Cu aceasta sunt legate, spre exemplu, problemele analizei stabilităţii şi oscilaţiile libere ale sistemelor fizice.

Valoarea $\gamma=\gamma_*$ pentru care are loc apariţia mai multor soluţii se numeşte valoare bifurcaţională a parametrului sau punct de ramificare a soluţiilor, iar însăşi apariţia acestor soluţii se numeşte ramificarea sau bifurcarţia soluţiilor. Este clar că bifurcaţia soluţiilor ecuaţiei neliniare (1.4.1) poate apare numai pentru aşa valori a parametrului γ, pentru care nu sunt respectate condiţiile (1.4.2) şi în consecinţă pentru valorile de bifurcaţie ale parametrului $\gamma=\gamma_*$ trebuie să fie:

$$\frac{\partial f(x,\gamma)}{\partial x}=0 \text{ şi } f(x,\gamma)=0 \text{ pentru } x=x_* \text{ şi } \gamma=\gamma_*. \tag{1.4.3}$$

Pentru prima dată problema construirii soluţiilor $x_1(\gamma), ..., x_\tau(\gamma)$ şi analiza lor a fost studiată de Newton. El a studiat metodele de construire a acestor soluţii, care practic au ajuns pînă în zilele noastre.

Admitem, că funcţia $f(x,\gamma)$ în (1.4.1) pote fi descompusă în vecinătatea punctului de bifurcaţie (x_*,γ_*) în serie de puteri după puterile întregi ale diferenţelor $(x-x_*)$ şi $(\gamma-\gamma_*)$, satisface condiţiilor (1.4.3) şi, prin consecinţă, această descompunere nu conţine termenul liber şi termenul liniar după $(x-x_*)$. Atunci ecuaţia (1.4.1) poate fi scrisă sub forma:

$$l_{01}(\gamma-\gamma_*)+l_{20}(x-x_*)^2+\varphi_0(x,\gamma)=0 \tag{1.4.4}$$

cu convenţia că coeficienţii $l_{01} \neq 0, l_{20} \neq 0$.

Indicii de jos ai coeficienţilor l_{ij} coincid cu exponenţii puterilor cu care diferenţele ($x - x_*$) şi ($\gamma - \gamma_*$) se conţin în termenii respectivi, în aşa mod că primul indice notează exponenta puterii diferenţei ($x - x_*$), iar al doilea indice indică exponenta puterii diferenţei ($\gamma - \gamma_*$). În descompunerea (1.4.4) sub formă explicită sunt scrişi numai termenii principali, iar toate componentele de ordin superior de micitate sunt grupaţi în funcţia $\varphi_0(x,\gamma)$. Menţionăm, că pînă cînd dependenţa $x - x_* = \psi(\gamma - \gamma_*)$ nu este determinată, este imposibil de vorbit despre ordinul de micitate ale componentelor $l_{01}(\gamma - \gamma_*)$ şi $l_{20}(x - x_*)^2$ şi deaceea separînd partea principală în descompunerea (1.4.4) este necesar de păstrat ambele componente. Spre exemplu, următorii termeni după ordinul de micitate în (1.4.4) ar urma termenii $l_{11}(x - x_*)(\gamma - \gamma_*)$, $l_{02}(\gamma - \gamma_*)^2$, dar fiindcă $(x - x_*) \to 0$ cînd $\gamma \to \gamma_*$, acest termen are un ordin mai superior de micitate în raport cu $l_{01}(\gamma - \gamma_*)$. Din aceeaşi cauză componenta $l_{02}(\gamma - \gamma_*)^2$ are un ordin de micitate mai superior comparativ cu $l_{01}(\gamma - \gamma_*)$. În cazul cînd unul din coeficienţii l_{01} sau l_{02}, sau ambii simultan se transformă în zero, prin raţionamente analogice se separă partea principală în descompunerea funcţiei $f(x,\gamma)$ după puterile diferenţelor $(x - x_*)$ şi $(\gamma - \gamma_*)$. Potrivit teoriei lui Newton vom căuta soluţia ecuaţiei neliniare (1.4.1) în vecinătatea valorii bifurcaţionale ale parametrului $\gamma = \gamma_*$ sub forma:

$$x(\gamma) = x_* + \alpha_1(\gamma - \gamma_*)^{\varepsilon_1} + \alpha_2(\gamma - \gamma_*)^{\varepsilon_2} + \dots, \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots \ , \tag{1.4.5}$$

unde α_i şi ε_i $(i = 1,2,3,\dots)$ sunt la moment coeficienţii şi exponenţii puterilor nedeterminaţi. Pentru comoditatea raţionamentelor de mai departe scriem (1.4.5) sub forma:

$$x(\gamma) = x_* + \alpha_1(\gamma - \gamma_*)^{\varepsilon_1} + \varphi_1(\gamma), \tag{1.4.6}$$

unde $\varphi_1(\gamma)$ include în sine toate componentele de o micitate de ordin mai superior în raport cu componenta principală separată $\alpha_1(\gamma - \gamma_*)^{\varepsilon_1}$. Înlocuind (1.4.6) în ecuaţia (1.4.4) o transformăm într-o identitate care prezintă o serie după puterile $(\gamma - \gamma_*)^{\varepsilon_i}$ $(i = 1,2,\dots)$. În rezultat avem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\gamma - \gamma_*)^{\varepsilon_k} \equiv 0 \ , \tag{1.4.7}$$

unde coeficienţii β_k se exprimă prin metode descrise în continuare prin coeficienţii necunoscuţi α_i. Identitatea (1.4.7) este satisfăcută dacă toţi coeficienţii β_k se transformă în zero:

$$\beta_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots . \tag{1.4.8}$$

Relaţiile (1.4.8) servesc drept condiţii pentru determinarea coeficienţilor α_i. Metoda de determinare a valorilor exponenţilor puterilor ε_i va deveni clară din raţionamentele de mai jos.

Efectuăm calcule concrete pentru a determina valorile α_1, ε_1. În acest scop înlocuim (1.4.6) în (1.4.4) şi menţinînd sub formă explicită numai termenii principali în descompuneri, vom avea:

$$l_{01}(\gamma - \gamma_*) + l_{20}\alpha_1^2(\gamma - \gamma_*)^{2\varepsilon_1} + \Phi_0(\gamma - \gamma_*) \equiv 0, \tag{1.4.9}$$

unde în funcţia $\Phi_0(\gamma - \gamma_*)$ sunt incluşi toţi termenii de o micitate de ordin mai superior în raport cu termenii $l_{01}(\gamma - \gamma_*)$ şi $l_{20}\alpha_1^2(\gamma - \gamma_*)^{2\varepsilon_1}$. Prin convenţie coeficienţii l_{01} şi l_{02} sunt diferiţi de zero. Dat fiind, că exponentul puterii mărimii ε_1 la moment nu este determinat, putem admite că coeficientul α_1 din (1.4.5) nicicînd nu se transformă în zero.

Vom analiza condiţiile cînd expresia $l_{01}(\gamma - \gamma_*) + l_{20}\alpha_1^2(\gamma - \gamma_*)^{2\varepsilon_1}$ care reprezintă termenul principal în descompunerea (1.4.9) se va transforma în zero. Dat fiind că valoarea ε_1 este nedeterminată, sunt posibile trei situaţii:

$$2\varepsilon_1 < 1, \quad 2\varepsilon_1 = 1, \quad 2\varepsilon_1 > 1.$$

Dacă $2\varepsilon_1 < 1$, componenta $l_{20}\alpha_1^2(\gamma - \gamma_*)^{2\varepsilon_1}$ are un grad de micitate mai mic decît componenta $l_{01}(\gamma - \gamma_*)$ şi, prin urmare, pentru a satisface identitatea ea trebuie să se transforme în zero. Dar aceasta este posibilă numai pentru $l_{20} = 0$ sau $\alpha_1 = 0$, ce contrazic convenţiei că $l_{20} \neq 0$ şi $\alpha_1 \neq 0$. Deci $2\varepsilon_1 \geq 1$. În cazul cînd $2\varepsilon_1 > 1$ componenta $l_{01}(\gamma - \gamma_*)$ are ordin mai mic de micitate şi identitatea poate fi satisfăcută numai cînd $l_{01} = 0$, ce contrazice convenţiei că $l_{01} \neq 0$. În rezultat facem concluzia că

$$2\varepsilon_1 = 1. \tag{1.4.10}$$

Cu aceste raţionamente, identitatea (1.4.9) poate fi scrisă

$$(l_{01} + l_{20}\alpha_1^2)(\gamma - \gamma_*) + \Phi_0(\gamma - \gamma_*) = 0. \tag{1.4.11}$$

Cerinţa ca termenul principal al descompunerii în identitatea (1.4.11) să se transforme în zero ne conduce la condiţia pentru determinarea coeficientului α_1:

$$l_{01} + l_{20}\alpha_1^2 = 0. \tag{1.4.12}$$

Din ecuaţia (1.4.12) determinăm două valori α_{11} şi α_{12} a coeficientului α_1.

$$\alpha_{11} = \sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}\,, \quad \alpha_{12} = -\sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}\,. \tag{1.4.13}$$

Aşa dar pentru $\gamma = \gamma_*$ obţinem două soluţii ale ecuaţiei neliniare (1.4.1), care, în vecinătatea valorii γ_* pot fi reprezentate:

$$x_{1,2}(\gamma) = x_* \pm \sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}} \cdot (\gamma - \gamma_*)^{\frac{1}{2}} + \varphi_{1,2}(\gamma - \gamma_*)\,. \tag{1.4.14}$$

Fiecare din aceste două soluţii poate fi ameliorată separînd din $\varphi_i(\gamma - \gamma_*)$ $(i = 1, 2)$ termenii următori după gradul de micitate din descompunere.

Remarcăm, că (1.4.4) este forma cea mai generală a ecuaţiei neliniare (1.4.1) în vecinătatea punctului de bifurcaţie γ_0. Prin urmare în acest caz general obţinem numai două soluţii descrise de formulele (1.4.14) şi care în vecinătatea valorii $\gamma = \gamma_*$ au forma

$$x_{1,2}(\gamma) - x_* \approx \pm\sqrt{\gamma - \gamma_*}$$

În cazuri mai particulare, cînd $l_{01} = 0$ sau $l_{20} = 0$, sau ambii coeficienţi $l_{01} = 0$ şi $l_{20} = 0$ simultan, sau cînd paralel cu $l_{01} = 0$ şi $l_{20} = 0$ se transformă în zero şi alţi coeficienţi l_{ij}, atunci, atît numărul de soluţii obţinute $x_1(\gamma), x_2(\gamma),..., x_r(\gamma)$, cît şi exponenţii puterilor $\varepsilon_1, \varepsilon_2,..., \varepsilon_r$ termenilor generali în descompunerea acestor soluţii depind de fiecare caz concret studiat.

Din cauza caracterului general al soluţiilor (1.4.14) vom efectua o analiză mai detaliată a lor. Dat fiind că prin convenţie $l_{01} \neq 0$ şi $l_{20} \neq 0$, vom deosebi două cazuri posibile: cînd $l_{01} \cdot l_{20} > 0$, adică cînd l_{01} şi l_{20} au acelaşi semn, şi cînd $l_{01} \cdot l_{20} < 0$, adică cînd l_{01} şi l_{20} posedă semne diferite (contrare). În primul caz coeficientul $\sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}$ în (1.4.14) este o mărime imaginară şi atunci soluţiile $x_{1,2}(\gamma)$ sunt reale pentru $\gamma < \gamma_*$, fiindcă $\sqrt{\gamma - \gamma_*}$ pentru aceste valori ale parametrului γ este tot imaginară. Pentru $\gamma > \gamma_*$ soluţiile reale lipsesc. Comportarea calitativă a soluţiilor $x_{1,2}(\gamma)$ în vecinătatea valorii bifurcaţionale a parametrului γ_* pentru acest caz este prezentată în fig.1.4.1.

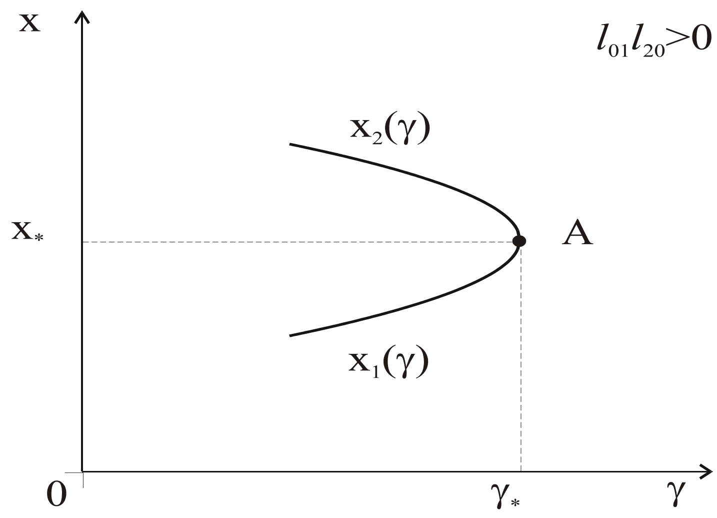

Fig. 1.4.1

Pentru $l_{01} \cdot l_{20} < 0$ coeficientul $\sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}$ în (1.4.14) este o mărime reală şi atunci soluţiile reale $x_{1,2}(\gamma)$ există numai în domeniul $\gamma \geq \gamma_*$. Comportarea calitativă a soluţiilor $x_{1,2}(\gamma)$ în vecinătatea punctului de bifurcaţie γ_* în acest caz sunt prezentate în fig. 1.4.2.

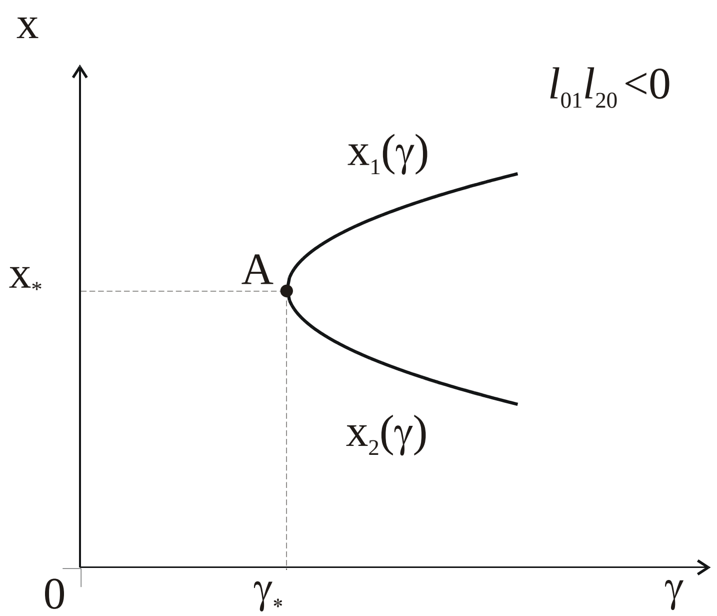

Fig. 1.4.2

Menţionăm, că pentru ambele soluţii în punctul de bifurcaţie $\gamma = \gamma_*$ avem:

$$\frac{dx_{1,2}(\gamma)}{d\gamma} = \infty .$$

Vom preciza reprezentările (1.4.14) ale soluţiilor $x_1(\gamma)$ şi $x_2(\gamma)$, definind forma explicită a termenilor următori după termenii principali din descompuneri. Calculele detaliate vor fi efectuate pentru soluţia $x_1(\gamma)$, reprezentînd-o sub forma

$$x_1(\gamma) = x_* + \sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}(\gamma-\gamma_*)^{1/2} + \alpha_{21}(\gamma-\gamma_*)^{1/2+\varepsilon_2} + \varphi_{11}(\gamma-\gamma_*), \qquad (1.4.16)$$

unde $\alpha_{21}, \varepsilon_2 > 0$ sunt mărimi care ţin a fi determinate. Reprezentarea exponentului puterii sub forma $\frac{1}{2}+\varepsilon_2$ este cauzată de comoditatea analizei care urmează. De rînd cu includerea termenilor de ordin mai mare de micitate în reprezentarea (1.4.16) pentru soluţia $x_1(\gamma)$ este necesar de ţinut cont şi de termenii următori în descompunerea $f(x,\gamma)$ în (1.4.4):

$$l_{01}(\gamma-\gamma_*) + l_{20}(x-x_*)^2 + l_{11}(x-x_*)(\gamma-\gamma_*) + l_{30}(x-x_*)^3 + \varphi_{01}(x,\gamma) = 0 . \qquad (1.4.17)$$

Calculele nemijlocite demonstrează, că numai termenii scrişi sub formă explicită definesc valorile α_{21} şi ε_2. Înlocuind expresia (1.4.16) în (1.4.17) şi păstrînd numai termenii cu cel mai mic exponent al puterilor diferenţei $\gamma-\gamma_*$, obţinem:

$$\left(l_{30}\sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}^{\,3} + \sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}\,l_{11}\right)(\gamma-\gamma_*)^{\frac{3}{2}} + 2\cdot l_{20}\cdot\alpha_{21}\sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}(\gamma-\gamma_*)^{1+\varepsilon_2} + \chi(\gamma-\gamma_*) \equiv 0 \qquad (1.4.18)$$

unde în funcţia $\theta(\gamma-\gamma_*)$ sunt incluşi termenii de ordin mai superior de micitate în raport cu termenii expliciţi.

Rezolvînd analogic ca şi la determinarea mărimilor ε_1 şi α_1, obţinem:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{21} = \frac{l_{30}l_{01} - l_{11}l_{20}}{2l_{20}^2}. \qquad (1.4.19)$$

Pentru precizarea soluţiei $x_2(\gamma)$ în (1.4.14) putem utiliza rezultatele obţinute pentru soluţia $x_1(\gamma)$, înlocuind numai valoarea pozitivă a rădăcinei $\sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}$ cu cea negativă. Rezultatul care coincide cu (1.4.19) iar reprezentările pentru soluţiile $x_1(\gamma)$ şi $x_2(\gamma)$ capătă forma:

$$x_{1,2}(\gamma) = x_* \pm \sqrt{-\frac{l_{01}}{l_{20}}}(\gamma-\gamma_*)^{\frac{1}{2}} + \alpha_{21,22}(\gamma-\gamma_*) + \varphi_{11,21}(\gamma-\gamma_*)\,. \tag{1.4.20}$$

Vom aplica rezultatele de mai sus pentru cazul concret al ecuaţiei:

$$xe^{-x} = \gamma \;,\; \gamma \ge 0,\; x \ge 0 \tag{1.4.21}$$

Dat fiind, că partea stîngă a expresiei (I.4.21) $\varphi(x) = xe^{-x}$ posedă un singur maximum pentru $x_* = 1$ şi, prin consecinţă, $\varphi(x) \le \varphi(x_*) = 1/e$, soluţiile reale a ecuaţiei neliniare (1.4.21) există numai pentru $\gamma \le \gamma_* = 1/e$, în timp ce în domeniul valorilor $\gamma \in (0,\gamma_*)$ există două soluţii, iar pentru $\gamma > \gamma_*$ soluţii reale nu există.

Aplicăm pentru analiza ecuaţiei (1.4.21) teoria de mai sus pentru bifurcaţiile soluţiilor ecuaţiilor neliniare. Pentru aceasta transcriem (1.4.21) sub forma:

$$f(x,\gamma) = xe^{-x} - \gamma = 0\,. \tag{1.4.22}$$

Condiţia (1.4.3) pentru bifurcaţia soluţiilor $\partial f/\partial x = e^{-x}(1-x) = 0$ serveşte pentru determinarea valorii $x_* = 1$, iar din (1.4.22), înlocuind $x = x_*$ şi $\gamma = \gamma_*$, obţinem valoarea parametrului de bifurcaţie $\gamma_* = 1/e$. Descompunerea sub forma (1.4.4) capătă forma:

$$-\left(\gamma - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}(x-1)^2 + \varphi_0(x,\gamma) = 0\,, \tag{1.4.23}$$

deci, $l_{01} = -1,\; l_{20} = -\dfrac{1}{e}$. În concordanţă cu (1.4.14) în vecinătatea punctului de bifurcaţie soluţiile $x_{1,2}(\gamma)$ capătă forma:

$$x_{1,2}(\gamma) \approx 1 \mp \sqrt{e}\sqrt{\frac{1}{e} - \gamma},\quad \frac{1}{e} - \gamma \ll 1\,, \tag{1.4.24}$$

iar comportarea calitativă a acestor soluţii este reprezentată în fig.1.4.1.

Vom analiza în continuare particularităţile bifurcaţiei soluţiilor ecuaţiilor neliniare pentru o clasă mai restrînsă de ecuaţii, cînd unii coeficienţi l_{01}, l_{20}, l_{11} se transformă în zero, examinînd un exemplu concret:

$$f(x,\gamma) \equiv x^3 - 3x\gamma + \gamma^3 = 0\,. \tag{1.4.25}$$

Valorile $\gamma = 0$ şi $x = 0$ satisfac ecuaţia (1.4.25), adică $f(0{,}0) = 0$. În acest punct $\partial f/\partial x = 3x^2 - 3\gamma = 0$, şi, deci, $\gamma_* = 0$ este punctul de bifurcaţie.În aceste condiţii $\mathrm{l}_{01} = 0$, $\mathrm{l}_{20} = 0$, $\mathrm{l}_{11} = -3$, $\mathrm{l}_{03} = 1$, $\mathrm{l}_{30} = 1$. Vom căuta soluţia ecuaţiei (1.4.25) sub forma:

$$x(\gamma) = \alpha_1\gamma^{\varepsilon_1} + \varphi_1(\gamma)\,. \tag{1.4.26}$$

Înlocuim reprezentarea (1.4.26) în (1.4.25) păstrînd în mod explicit numai termanii principali în descompunere după puterile lui γ. Ecuaţia (1.4.25) se transformă în identitate în raport cu parametrul γ:

$$\alpha_1^3\gamma^{3\varepsilon_1} - 3\alpha_1\gamma^{1+\varepsilon_1} + \gamma^3 + \theta(\gamma) \equiv 0\,. \tag{1.4.27}$$

Pentru a satisface identitatea (1.4.27) este necesară egalitatea cu zero cel puţin a termenilor principali. Dar, dat fiind că $\alpha_1 \neq 0$, sunt posibile trei situaţii:

$$3\varepsilon_1 = 1+\varepsilon_1,\;\; 3\varepsilon_1 = 3,\;\; 1+\varepsilon_1 = 3\,.$$

Pentru $3\varepsilon_1 = 1+\varepsilon_1$ avem $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. În acest caz cel mai mic ordin îl au primii doi termeni din (1.4.27) şi din condiţia transformării în zero a coeficientului de pe lîngă $\gamma^{3/2}$ obţinem $\alpha_1^2 = 3 \quad (\alpha_1 \neq 0)$. Acestui caz îi corespund două soluţii:

$$x_{1,2}(\gamma) = \pm\sqrt{3}\gamma^{1/2} + \varphi_{1,2}(\gamma)\,. \tag{1.4.28}$$

Cazului $3\varepsilon_1 = 3$ îi corespunde valoarea $\varepsilon_1 = 1$. Ordinul inferior îl are în acest caz termenul al doilea în (1.4.27) şi din condiţia că el se transformă în zero, urmează $\alpha_1 = 0$, ceea ce contrazice convenţiei $\alpha_1 \neq 0$ şi, deci, $\varepsilon_1 \neq 1$. În cazul $1+\varepsilon_1 = 3$, obţinem $\varepsilon_1 = 2$. Grade inferioare au termenii al doilea şi al treilea, de unde urmează $\alpha_1 = \frac{1}{3}$. Obţinem a treia soluţie a ecuaţiei (1.4.27)

$$x_3 = \frac{1}{3}\gamma^2 + \varphi_3(\gamma)\,. \tag{1.4.29}$$

Deci, spre deosebire de cazul general al bifurcaţiei soluţiilor, cînd ecuaţia $f(x,\gamma) = 0$ în vecinătatea punctului de bifurcaţie posedă numai două soluţii (1.4.14), în cazul concret studiat în punctul de bifurcaţie apar trei soluţii reale (1.4.28) şi (1.4.29). Menţionăm, că de rînd cu valoarea de bifurcaţie $\gamma_* = 0$ a parametrului γ, ecuaţia (1.4.25) mai posedă o valoare de bifurcaţie, determinată din rezolvarea sistemului de ecuaţii:

$$f(x,\gamma) = 0,\;\; \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0\,,$$

care în cazul particular studiat capătă forma:

$$x^3 - 3x\gamma + \gamma^3 = 0,\quad 3(x^2 - \gamma) = 0\,. \tag{1.3.30}$$

Din ecuaţia a doua a sistemului (1.4.30) obţinem $\gamma = x^2$, iar prima ecuaţie, ţinînd cont de această dependenţă capătă forma:

$$x^3(x^3 - 2) = 0. \qquad (1.3.31)$$

Vom studia în continuare valorile de bifurcaţie $x_{*2}^3 = 2$, care corespund soluţiei ecuaţiei $x^3 = 2$. Obţinem următoarele rădăcini reale:

$$x_{*2} = \sqrt[3]{2}, \quad \gamma_{*2} = x_{*2}^2 = \sqrt[3]{4}. \qquad (1.3.32)$$

Descompunînd partea stîngă a expresiei (1.4.25) în serie după puterile variabilelor x, γ în vecinătatea valorilor de bifurcaţie (1.4.32) şi păstrînd sub formă explicită numai termenii principali din această descompunere , obţinem:

$$3\sqrt{2}(\gamma - \gamma_{*2}) + 3\sqrt{2}(x - x_{*2})^2 + \varphi_0(x, \gamma) = 0. \qquad (1.4.33)$$

În (1.4.33) $l_{01} = 3\sqrt{2} \neq 0$, $l_{20} = 3\sqrt{2} \neq 0$ şi posedă acelaşi semn. Aşa dar ecuaţia (1.4.33) aparţine tipului general şi în punctul de bifurcaţie x_{*2}, γ_{*2} apar două soluţii reale, care au, în vecinătatea acestui punct, în conformitate cu (1.4.14) următoarea comportare:

$$x_{1,2}^2(\gamma) = x_{*1} \mp \sqrt{\gamma_{*2} - \gamma}, \quad x_{*2} = \sqrt[3]{2}, \quad \gamma_{*2} = \sqrt[3]{4}) \qquad (1.4.34)$$

În fig.1.4.3 este reprezentat graficul soluţiei calitative a ecuaţiei neliniare (1.4.25)

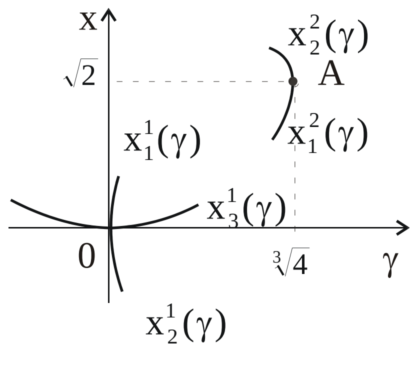

Fig. 1.4.3

Totodată în fig.1.4.4 este reprezentată curba care este descrisă de aceeaşi ecuaţie (1.4.25). Vom aduce aici şi representările parametrice ale acestei curbe:

$$x(\varphi) = \frac{3\cos^2\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \qquad y(\varphi) = \frac{3\cos\varphi \sin^2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}.$$

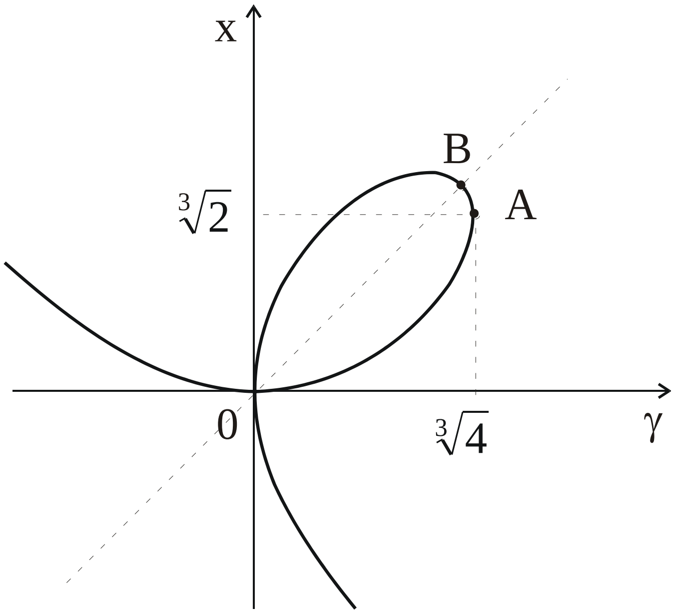

Fig. 1.4.4