

Capitolul 2. METODE ASIMPTOTICE DE ANALIZĂ A INTEGRALELOR

Într-o serie vastă de cazuri soluțiile problemelor fizice și mărimilor fizice sunt reprezentate sub formă de integrale, dependente de parametru. Ca regulă acestea sunt integrale care nu pot fi reprezentate prin funcții elementare. Analiza dependenței fenomenului studiat de parametru cere în acest caz calculul reprezentării integrale pentru un șir de valori ale parametrilor. În multe cazuri calcularea valorii aproximative a integralei cu aplicarea metodelor numerice și mașinilor electronice de calcul întâlnesc dificultăți chiar și pentru mijloace puternice contemporane de calcul.

Din mulțimea problemelor care apar, vom numi, spre exemplu, problema calculării integralelor de la funcții *rapid oscilatoare*. Metoda nestandardă cere și calcularea integralelor, în care funcțiile de sub integrală se pot transforma în infinit. În același timp, la rezolvarea problemelor de cercetare în fizică tipurile de integrale menționate mai sus apar foarte frecvent. Mai menționăm, că cu creșterea multiplicității integralelor dificultățile calculului cresc esențial.

În cazurile când valoarea parametrului care se conține în funcția de sub integrală capătă valori mici sau mari, deseori sunt posibile simplificări esențiale în reprezentarea integrală a dependenței studiate și obținerea ei sub forma analitică cu gradul de exactitate necesar.

În prezent există o mulțime de metode și procedee de analiză a dependenței integralelor de parametru (pentru valorile lui limite), de clasa de funcții de sub semnul integralei. Mulțimea acelor procedee și metode a căpătat denumirea de *metode asimptotice* de analiză a integralelor. Descrierea metodelor fundamentale din această mulțime reprezintă conținutul acestui capitol.

Este necesar de menționat, că analiza asimptotică a integralelor are o însemnătate individuală și în prezent sa transformat într-un compartiment vast al analizei matematice contemporane, în special, analiza integralelor multiple de la funcții *rapid oscilatoare* [5], [29]

Remarcăm, totodată, că studierea comportării asimptotice a funcțiilor speciale este bazată pe reprezentările lor integrale, iar în programele standarde de calcul a funcțiilor speciale la calculatoare sunt utilizate reprezentările lor asimptotice.

În capitolul dat, într-o formă restrânsă și accesibilă pentru studiul inițial sunt descrise metode larg utilizate și care au devenit deacuma clasice de analiză a integralelor simple. Necătfînd la cantitatea mare de surse în care într-o măsură sau alta sunt descrise aceste metode, studierea acestor surse cu țelul de a se familiariza cu metodele analizei asimptotice a integralelor este foarte dificilă (în primul rînd de cantitatea mare de surse). Majoritatea surselor sunt orientate spre specialiștii deacum formați în acest domeniu. Alte surse sunt consacrate aspectelor matematice a metodelor asimptotice de integrare complicate pentru începători. În unele surse metodele sunt descrise superficial, fără a

ține cont de detaliile matematice, care tot pot duce, pentru începător la păreri greșite despre metodele asimptotice.

Prezenta expunere a metodelor asimptotice de integrare după părerile autorilor poartă un caracter intermediar. Pe de o parte la expunerea materialului o atenție serioasă este acordată stricteții matematice a expunerii materialului, pe de altă parte sub o formă clară și reproductivă sunt prezentate procedeele de obținere a reprezentărilor asimptotice a integralelor.

În același timp, spre deosebire de literatura matematică, în care o atenție mare este acordată obținerii descompunerilor asimptotice complete, demonstrării convergenței lor, etc – bineînțeles, întrebări foarte principiale și importante în cercetările matematice, în capitolul dat este discutat detaliat obținerea în formă explicită a descompunerilor respective numai limitându-ne cu primul, sau primul și al doilea termen, în discompunere, de obicei suficienți pentru analiza problemelor de fizică. Expunerea materialului este însoțită de studierea unui număr mare de exemple, selecționate în așa mod, ca metodele aplicate la analiza lor să includă o clasă cât mai vastă de integrale. Eficacitatea reprezentărilor asimptotice în majoritatea cazurilor sunt ilustrate prin compararea valorilor integralelor, obținute prin metodele descrise cu rezultatele calculelor acestor integrale la mașinile electronice, cu utilizarea pachetului MATHEMATICA.

Vom expune succint conținutul capitolului pe paragrafe.

Într-o serie întregă de probleme estimările asimptotice ale integralelor pot fi obținute aplicând procedee elementare dar eficiente de analiză a integralelor și funcțiilor de sub semnul integralei. Expunerii unei așa metode – metodei integrării prin părți – este consacrat paragraful 2. 1. Metoda expusă este aplicată la calcularea integralelor cu limita de sus variabilă și ale altor tipuri de integrale.

Într-o clasă vastă de probleme fizice apare necesitatea calculării integralelor în cazurile când funcțiile de sub integrală se transformă în infinit, când parametrul tinde spre o valoare determinată (ca regulă, spre zero). Așa tip de integrale sunt numite integrale cu singularități slabe. Analiza asimptotică a acestor integrale este expusă în paragraful 2.2.

În paragraful 2.3 este expusă metoda de calcul a integralelor, devenită de acum clasică, când funcțiile de sub integrală posedă un maximum bine evidențiat.

Studierea diferitor procese ondulatorii în majoritatea cazurilor conduc la necesitatea analizei integralelor pentru cazul când funcția de sub integrală conține o exponentă cu argumentul imaginar, care conține un parametru. Analiza asimptotică a acestor integrale pentru valori mari ale parametrului este expusă în paragraful 2.4. Tot aici este studiat un tip special de integrale care permite aplicarea metodei analizei complexe pentru construirea eficiente a dependențelor asimptotice ale integralelor de parametru.

În paragraful 2.5 este expusă una din cele mai puternice metode de obținere a aproximațiilor asimptotice ale integralelor – metoda pantei maxime. Detaliat este expusă metoda obținerii reprezentărilor asimptotice pentru un șir de funcții speciale.