.

2. 1. Metode elementare de obţinere a reprezentărilor asimptotice ale integralelor

În multe cazuri reprezentarea asimptotică pentru integralele dependente de parametru, poate fi obţinută, aplicînd una din metodele generale de integrare – formula de integrare prin părţi.

$$\int_a^b u dv = uv_a^b - \int_a^b v du. \tag{2.1.1}$$

Limitele de jos şi de sus a şi b pot fi atât finite cît şi infinite, şi se admite că condiţiile de aplicare a formulei de integrare prin părţi şi existenţei integralelor din stânga şi dreapta în (2.1.1) sunt satisfăcute.

Este specifică utilizarea formulei (2.1.1) în analiza asimptotică prin faptul că pentru a obţine aproximaţii asimptotice eficace este necesară satisfacerea unei condiţii suplimentare.

$$\left| \frac{\int_a^b v du}{uv_a^b} \right| << 1. \tag{2.1.2}$$

În aşa condiţii primul termen din (2.1.1) va reprezenta termenul principal în descompunerea asimptotică şi expresia (2.1.1) se scrie

$$\int_a^b u dv \approx uv_a^b \,. \tag{2.1.3}$$

Aplicarea repetată a formulei de integrare prin părţi (de această dată pentru integrarea din partea dreaptă a formulei (2.1.1)) permite obţinerea termenului următor în descompunerea asimptotică a integralei. La aplicarea repetată a acestei reguli este necesar după fiecare integrare satisfacerea condiţiei (2.1.2). Dacă această condiţie nu este satisfăcută atunci procedeul de obţinere a termenilor seriei asimptotice trebuie suspendat. Dat fiind că formula de integrare prin părţi este una din formulele generate de integrare, aplicarea ei pentru a obţine reprezentările asimptotice ale integralelor este posibilă pentru o clasă vastă de integrale.

Aplicăm acest procedeu pentru a obţine reprezentarea asimptotică a integralei *Stieltjes*

$$J(\gamma)=\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma}d\tau, \qquad \gamma>0, \tag{2.1.4}$$

care joacă un rol important în multe probleme ale analizei matematice.

Mai întîi menţionăm, că $J(\gamma)$ este o funcţie monoton descrescătoare pentru toate valorile $\gamma>0$, fiindcă $J'(\gamma)=-\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{(\tau+\gamma)^2}d\tau<0$, în timp ce $J(0)=\infty$, $J(\infty)=0$. Vom determina comportarea funcţiei $J(\gamma)$ pentru $\gamma\to 0$ ($\gamma<<1$) şi $\gamma\to\infty$ ($\gamma>>1$).

Cazul $\gamma<<1$. Reprezentăm integrala Stielfjes sub forma (2.1.1), substituind $u(\tau)=e^{-\tau}$, $v(\tau)=\ln(\tau+\gamma)$ şi aplicînd formula de integrare prin părţi:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma}d\tau=\ln\frac{1}{\gamma}+\int_0^\infty e^{-\tau}\ln(\tau+\gamma)d\tau \tag{2.1.5}$$

Egalitatea (2.1.5) în raport cu parametrul γ reprezintă o identitate şi este valabilă pentru toţi $\gamma>0$. Pentru $\gamma<<1$, integrala din partea dreaptă este finită, iar $\ln\frac{1}{\gamma}>>1$ pentru $\gamma<<1$ şi, deci, condiţia (2.1.2) în acest caz este satisfăcută, de unde urmează ca integrala Stieltjes pentru valorile parametrului γ ($0<\gamma<<1$) are următoarea comportare asimptotică:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma}d\tau\approx\ln\frac{1}{\gamma}, \qquad 0<\gamma<<1. \tag{2.1.6}$$

Expresia asimptotică (2.1.6) poate fi ameliorată ţinînd cont de comportarea asimptotică a integralei din partea dreaptă a formulei (2.1.5). Pentru $\gamma\to 0$, această integrală tinde spre un număr finit $C=\lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty e^{-\tau}\ln(\tau+\gamma)d\tau=\int_0^\infty e^{-\tau}\ln\tau d\tau=-0.577216$, cunoscut sub denumirea de constanta Euler. Cu aceste observaţii putem scri descompunerea asimptotică a integralei Stielfjes sub forma:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma}d\tau\approx\ln\frac{1}{\gamma}+C, \quad C=-0.577216, \quad \gamma<<1. \tag{2.1.7}$$

Menţionăm că reprezentarea asimptotică (2.1.7) este mai eficace ca reprezentarea (2.1.6) ca rezultat al varierii lente a funcţiei $\ln\frac{1}{\gamma}$. Dat fiind că integrala Stielfjes nu poate fi calculată în mod explicit, expresia (2.1.7) reprezintă o formă analitică pentru ea în domeniul valorilor $0<\gamma<<1$, şi cu micşorarea parametrului γ precizia acestei reprezentări creşte. În acelaşi timp la calcularea valorilor numerice ale integralei (2.1.4) pentru valori mici ale parametrului γ dificultăţile calculelor şi erorile în valorile integralei cresc cu micşorarea lui γ, şi începând cu careva valoare $\gamma=\gamma_*$ obţinerea valorilor corecte a integralei Stieltjes devine imposibilă.

Menţionăm, că procedeul asimptotic în analiza integralelor mai permite paralel cu obţinerea reprezentărilor asimptotice şi algoritmilor numerici eficaci pentru calcularea integralelor. Aşa, spre exemplu, la calcularea integralei Stieltjes (2.1.4) pentru $0<\gamma<<1$ este oportun de o transformat la forma (2.1.5) şi de aplicat deacuma metode numerice standarde la calcularea integralei din partea dreaptă (2.1.5).

În continuare pentru estimarea eficacităţii reprezentărilor asimptotice obţinute (2.1.6) şi (2.1.7) prezentăm valorile integralei Stieltjes calculate pentru două valori a parametrului $\gamma_1=0.01$ şi $\gamma_2=0.001$ din formulele asimptotice (2.1.6), (2.1.7) şi, la fel, prin calcul nemijlocit (direct) după (2.1.4) cu aplicarea pachetului MATHEMATICA.

γ	$\ln\frac{1}{\gamma}$	$\ln\frac{1}{\gamma}+C$	$J(\gamma)$
0,01	4,60517	4,02795	4,07851
0,001	6,90775	6,33054	6,33787

Revenim acuma la analiza integralei Stieltjes (II.1.4) pentru valori mari a parametrului γ.

Cazul $\gamma>>1$. Ca şi în cazul valorilor mici ale parametrului γ, pentru obţinerea reprezentării asimptotice a integralei Stieltjes, aplicăm formula integrării prin părţi (2.1.1), înlocuind în acest caz $u(\tau,\gamma)=1/(\tau+\gamma)$ şi $v(\tau,\gamma)=e^{-\tau}$.

O singură aplicare a formulei de integrare prin părţi ne conduce la următoarea reprezentare a integralei (2.1.4)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma}d\tau=\frac{1}{\gamma}-\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{(\tau+\gamma)^2}d\tau, \qquad \gamma>0. \tag{2.1.8}$$

Expresia (2.1.8) reprezintă o identitate în raport cu parametrul γ, valabilă penru *toţi* $\gamma>0$. Dar dacă $\gamma>>1$ atunci integrala din partea dreaptă a formulei (2.1.6) este o mărime infinit de mică în raport cu termenul $1/\gamma$ şi ca consecinţă mărimea $1/\gamma$ reprezintă termenul principal al descompunerii integralei Stieltjes pentru $\gamma>>1$. Aplicarea multiplă a procedurii descrise conduce la expresia pentru integrala Stieltjes

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma} d\tau = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\gamma^n} + (-1)^n n! \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{(\tau+\gamma)^{n+1}} d\tau . \qquad (2.1.9)$$

Formula (2.1.8) prezintă o identitate în raport cu parametrul γ, valabilă pentru toţi $\gamma > 0$ şi, în plus la aceasta este o serie funcţională alternată. Dacă în această serie ne limităm cu primii k ($k < n$) termeni atunci în conformitate cu criteriul Leibniz suma acestor k termeni ce aproximează integral Stieltjes cu restul R_k, care nu întrece după valoarea absolută valoarea termenului ($k+1$) şi deci:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau+\gamma} d\tau = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma^3} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\gamma^k} + R_k , \quad |R_k| < \frac{k!}{\gamma^{k+1}} \qquad (2.1.10)$$

Pentru $\gamma >> 1$, identitatea (2.1.9) serveşte drept bază pentru determinarea reprezentărilor asimptotice a integralei Stieltjes.

În legătură cu reprezentările (2.1.9) şi (2.1.10) vom face următoarea remarcă, care joacă un rol important în formularea corectă a descompunerilor asimptotice. Pentru valori fixate ale parametrului γ în descompunerile (2.1.10) şi (2.1.9) întotdeauna se va găsi un aşa număr $k = k_*$ care depinde de această valoare a parametrului γ, începând cu care termenii seriei vor creşte după valoarea absolută. Dacă vom întroduce notaţia $a_k(\gamma)$ pentru termenul k al seriei (2.1.10) sau al (2.1.9), atunci valoarea k_* se va calcula din cerinţele generale

$$|a_{k+1}(\gamma)/a_k(\gamma)| \approx 1. \qquad (2.1.11)$$

Pentru cazul studiat, avem

$$k_* \approx \gamma$$

Prin urmare dacă în descompunerile (2.1.9), (2.1.10) ne limităm ci primii k termeni şi dacă se va întîmpla că $k > k_*$, atunci eroarea comisă în acest caz poate fi cît dorim de mare. Precizia cea mai mare a reprezentării este atinsă pentru numărul de termeni $k \approx k_*$. Aşa spre exemplu, pentru $\gamma = 10$ $k_* < 10$ restul $R_{10} = 10!/10^{11} \sim 10^{-6}$, în timp ce $R_{100} = 100!/100^{101} \sim 10^{-44}$ pentru $\gamma = 100$.

Vom aplica în continuare formula de integrare prin părţi (2.1.1) pentru a deduce reprezentarea asimptotică pentru funcţia probabilităţilor, întîlnită foarte des în problemele de cercetare în fizcă [28]

$$\Phi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau, \quad x \geq 0. \qquad (2.1.12)$$

Mai întîi menţionăm, că în conformitate cu definiţia (2.1.12) $\Phi(0)=0$, $\Phi(\infty)=1$ şi fiindcă $\Phi'(x)=2e^{-x^2}/\sqrt{\pi}>0$ pentru $x\geq 0$, funcţia $\Phi(x)$ este monoton crescătoare pe semiaxa $x\geq 0$.

Determinăm comportarea funcţiei $\Phi(x)$ pentru $x\geq 0$. Pentru aceasta aplicăm formula de integrare prin părţi (2.1.1), transformând preventiv funcţia $\Phi(x)$ la forma:

$$\Phi(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\tau^2}d\tau=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\tau^2}d\tau. \qquad (2.1.13)$$

Expresia (2.1.13) reprezintă o identitate în raport cu x, valabilă *pentru toţi* $x\geq 0$. Însă pentru $x\to\infty$, integrala din partea dreaptă a formulei (2.1.13.) tinde spre zero şi deci, $\Phi(\infty)=1$este termenul principal al reprezentării asimptotice a funcţiei $\Phi(x)$ pentru $x>>1$. Termenii următori în descompunerea $\Phi(x)$, pot fi determinaţi aplicînd consecutiv la integrala din partea dreaptă în (2.1.13) formula integrării prin părţi. Aplicată o singură dată această formulă conduce la rezultatul:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\tau^2}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u^3}}du,$$

iar funcţia $\Phi(x)$ capătă forma:

$$\Phi(x)=1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u^3}}du. \qquad (2.1.14)$$

După n integrări prin părţi pentru funcţia probabilităţilor obţinem:

$$\Phi(x)=1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}+\frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}x^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)!!}{\sqrt{\pi}\,2^n}\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}+\frac{(-1)^{n+2}(2n+1)!!}{\sqrt{\pi}\,2^{n+1}}\int_{x^2}^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u^{2n+1}}}du \qquad (2.1.15)$$

valabilă *pentru toţi* $x>0$. Dat fiind că partea dreaptă în (2.1.15) este o serie funcţională alternativă, în conformitate cu regula lui Leibniz, limitarea în această serie cu primii k termeni conduce la restul, care nu depăşeşte, după valoare absolută, termenul ($k+1$) al seriei.

Pentru $x>>1$ din cauza prezenţei factorului e^{-x^2} în fiecare din termenii seriei cu creşterea lui x, eroarea descreşte exponenţial, iar reprezentarea asimptotică pentru funcţia probabilităţii devine foarte eficace.

În continuare pentru, ilustrarea celor obţinute, aducem valorile funcţiei probabilităţii pentru valorile $x=1,2$ şi 3, calculate cu ajutorul formulei asimptotice

(2.1.15), limitîndu-ne la primii doi termeni, $\Phi_2(x) \approx 1 - e^2 / \sqrt{\pi} x$, primii trei termeni $\Phi_3(x) \approx 1 - \ -e^{-x^2} / \sqrt{\pi} x + e^{-x^2} / 2\sqrt{\pi} x^3$ şi valoarea exactă $\Phi(x)$ obţinută prin calculul direct al integralei (2.1.12).

x	$\Phi_2(x)$	$\Phi_3(x)$	$\Phi(x)$
1	0.792446	0.896223	0.842701
2	0.994833	0.995479	0.995322
3	0.999977	0.999978	0.999978

Rezultatele din tabelă ne demonstrează, că începînd cu $x \geq 2$ descompunerea asimptotică a funcţiei probabilităţii

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x}, \quad x >> 1 \qquad (2.1.16)$$

practic coincide cu cea exactă.

Este necesar, însă, să menţionăm că pentru valoarea lui x fixată, în descompunerea (2.1.15) întotdeauna se va găsi aşa număr $n = n_*$ dependent de x, încât pentru $n > n_*$ valorile termenilor seriei (2.1.15) încep să crească, reprezentarea asimptotică se înrăutăţeşte, şi, în rezultat, eroarea poate deveni cât dorim de mare. Deci, ce-a mai reuşită reprezentare asimptotică a integralei este atinsă atunci, când se iau $n = n_*$ membri în descompunere.

Însăşi numărul n_* este determinat de relaţia $|a_{n+1} / a_n| \sim 1$, unde a_n este al n-lea termen al seriei. În cazul descompunerii (2.1.15) avem

$$n_* \sim x^2. \qquad (2.1.17)$$

Reprezentarea asimptotică a funcţiei $\Phi(x)$ pentru valori mici ale argumentului $x << 1$ poate fi obţinută din definiţia (2.1.12) descompunînd funcţia de sub integrală în serie de puteri şi integrînd această serie termen cu termen. În rezultatul calculelor respective avem

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} x^{2k+1}, \quad x \geq 0. \qquad (2.1.18)$$

Seria (2.1.18) converge spre $\Phi(x)$ pentru toţi $x \geq 0$, însă pentru aplicaţii practice, pentru $x > 1$, este cu mult mai comod de utilizat descompunerea (2.1.15).

Pentru $0 \leq x << 1$ avem :

$$\Phi(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \cdots\right), \quad 0 \le x << 1. \tag{2.1.19}$$

Vom studia în continuare comportarea asimptotică a unor funcţii, definite prin integrale cu limite de integrare variabile.

Alegem aceste funcţii sub forma cea mai des întîlnită în problemele de fizică.

$$J(x) = \int_0^x f(\tau)\, d\tau, \quad x \ge 0. \tag{2.1.20}$$

Vom analiza comportarea funcţiei $J(x)$ pentru valori mici ($x << 1$) şi valori mari ($x >> 1$) ale argumentului.

Cazul $x << 1$. După cum vom vedea în continuare caracterul dependenţei $J(x)$ în vecinătatea $x = 0$ într-o mare măsură depinde de proprietăţile funcţiei de sub integrală $f(\tau)$.

Aşa, pentru funcţia $f(\tau)$ analitică în punctul $x = 0$ şi în vecinătatea lui are loc următoarea descompunere în seria de puteri:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\tau^n, \quad 0 \le \tau \le l \tag{2.1.21}$$

unde l este raza de convergenţă. Înlocuind această descompunere în (2.1.20) şi integrînd termen cu termen seria de puteri obţinem:

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 \le x \le l. \tag{2.1.22}$$

Pentru $0 \le x << 1$ în (2.1.22) ne putem limita cu cîţiva termeni, iar eroarea comisă în acest caz este evaluată cu ajutorul restului R_n din seria de puteri.

Pentru aplicaţiile fizice un caz frecvent este cazul cînd $f(\tau)$ nu este funcţie analitică dar, în acelaşi timp, $f(\tau)$ poate fi reprezentată sub forma

$$f(\tau) = \mu(\tau)\varphi(\tau), \tag{2.1.23}$$

unde $\varphi(\tau)$ este o funcţie analitică, iar $\mu(\tau)$ – este funcţia pondere. Ca regulă funcţia $\mu(\tau)$ este o funcţie de tipul $\tau^{\alpha}\,(\alpha > -1)$ etc.

Convenim, că funcţia $f(\tau)$ este integrabilă. În vecinătatea punctului $\tau=0$, funcţia $f(\tau)$ (2.1.23) are forma:

$$f(\tau)=\mu(\tau)(\varphi(0)+\varphi'(0)\tau+\cdots)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\mu(\tau)\tau^{n}, \quad 0\le\tau\le l \tag{2.1.24}$$

(l este raza de convergenţă). Ţinând cont de (2.1.24) putem scri funcţia $J(x)$ sub forma:

$$J(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\int_{0}^{x}\mu(\tau)\tau^{n}d\tau, \quad 0\le\tau\le l\,. \tag{2.1.25}$$

Pentru $0\le x<<1$ termenul principal în descompunerea asimptotică (2.1.25) este determinat de primul termen:

$$J(x)\approx\varphi(0)\int_{0}^{x}\mu(\tau)d\tau, \quad 0\le x<<1. \tag{2.1.26}$$

Comportarea funcţiei $J(x)$ în vecinătatea imediată a lui $x=0$, depinde de tipul concret al funcţiei $\mu(\tau)$.

Aşa, spre exemplu, pentru $\mu_1(\tau)=\tau^{\alpha}$ $(\alpha>-1)$, $\mu_2(\tau)=\ln\tau$, $\mu_3(\tau)=\tau\ln\tau$ obţinem din (2.1.27)

$$J_1(x)\approx\frac{\varphi(0)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, \quad J_2(x)\approx\varphi(0)\,x\,\ln x, \quad J_3(x)\approx\frac{\varphi(0)}{2}x^{2}\ln x, \quad 0\le x<<1. \tag{2.1.27}$$

Termenii următori în descompunerile asimptotice pot fi obţinuţi prin calcule directe ale integralelor de tipul $\int_{0}^{x}\mu_i(\tau)\tau^{k}d\tau$, $k=1,2,3,\cdots$ în (2.1.25).

Cazul $x>>1$. La analiza comportării integralelor $J(x)$ (2.1.20) în vecinătatea punctului deplasat la infinit, adică, cînd $x>>1$, este comod de deosebit două cazuri: în primul caz valoarea limită $J(\infty)=\lim_{x\to\infty}J(x)$ este un număr finit şi în al doilea caz $J(\infty)=\infty$.

În cazul când $J(\infty)$ există şi are o valoare limitată putem reprezenta $J(x)$ (2.1.20) sub formă echivalentă, comodă pentru analiza asimptotică

$$J(x)=J(\infty)-\varphi(x), \quad \varphi(x)=\int_{x}^{\infty}f(\tau)d\tau\,. \tag{2.1.28}$$

Mai întîi menţionăm că, dacă $\lim_{x\to\infty}J(x)=J(\infty)$, atunci funcţia $\varphi(x)$ este un infinit mic, şi $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. Prin urmare $J(\infty)$ este termenul principal în reprezentarea asimptotică a funcţiei $J(x)$ pentru valori mari ale argumentului. Termenii următori în reprezentarea asimptotică a funcţiei $J(x)$ pot fi determinaţi pe calea separării consecutive din $\varphi(x)$ a termenilor cu valoare infinit de mică de ordin necesar.

Una din metodele de separare a acestor termeni este calcularea funcţiei $\varphi(x)$ aplicând formula de integrare prin părţi. În continuare vom discuta încă un procedeu eficaci de continuare a descompunerilor asimptotice bazat pe utilizarea comportării asimptotice a funcţiei de sub integrală.

Fie că $f(\tau)$ pentru $\tau >> 1$ permite descompunerea

$$f(\tau) \approx f_0(\tau) + f_1(\tau) + \cdots, \quad \tau >> 1 \tag{2.1.29}$$

şi $\left| f_{k+1}(\tau) / f_k(\tau) \right| << 1, \quad k = 0,1,2,\cdots$.

Dat fiind că integrala $\varphi_i(x) = \int_x^\infty f_i(\tau) d\tau$ ca regulă se calculează în mod explicit descompunerea asimptotică $J(x)$ din (2.1.28) după înlocuirea reprezentării (2.1.29) în $\varphi(x)$ şi calcularea funcţiilor $\varphi_i(x)$ capătă forma

$$J(x) = J(\infty) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x), \quad \varphi_i(x) = \int_x^\infty f_i(\tau) d\tau, \quad x >> 1. \tag{2.1.30}$$

În particular, pentru funcţiile analitice în domeniul $\tau >> 1$ descompunerea asimptotică (2.1.29) se concretizează

$$f(\tau) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{c_k}{\tau^k}, \qquad \tau >> 1, \tag{2.1.31}$$

(c_k sunt coeficienţi definiţi), iar reprezentarea asimptotică (2.1.30) poate fi scrisă sub forma:

$$J(x) = J(\infty) - \sum_{k=r}^{\infty} \frac{c_k}{k-1} \frac{1}{x^{k-1}}, \quad x >> 1. \tag{2.1.32}$$

În caz general descompunerile asimptotice (2.1.29) pot fi obţinute şi pentru funcţiile de tipul:

$$f(\tau) = \mu(\tau)\, g(\tau), \tag{2.1.33}$$

unde $g(\tau)$ este o funcţie analitică pentru $\tau >> 1$ şi descompunîndu-se în acest fel

$$g(\tau) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{a_k}{\tau^k}, \quad r > 0, \quad \tau >> 1 \tag{2.1.34}$$

iar $\mu(\tau)$ este funcţia pondere, care pentru $\tau = \infty$ posedă un punct particular de tipul punctelor de ramificare. În practica de cercetări ştiinţifice în calitate de funcţii de aşa tip apar funcţiile $\tau^{\alpha}(\alpha \neq n)(n$ – întreg), $\ln(\tau)$ şi combinaţia $\tau^{\alpha}\ln^{\beta}\tau$. În acest caz pentru fiecare funcţie concretă $\mu(\tau)$, funcţia $\varphi_i(x)$ din (2.1.30) se calculează în mod explicit $\varphi_i(x) = a_i\int_x^{\infty}\mu(\tau)\tau^{-i}d\tau$ şi, prinurmare, ajungem la reprezentarea asimptotică explicită pentru $J(x)$.

Aplicăm procedeul descris pentru analiza comportării asimptotice a integralei

$$J(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^4+1}} \tag{2.1.35}$$

pentru $x >> 1$. Dat fiind că $J(\infty)$ există şi este finită, prezentăm $J(x)$ sub forma (2.1.30)

$$J(x) = J(\infty) - \int_x^{\infty}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^4+1}}, \quad J(\infty) = 1.854075. \tag{2.1.36}$$

(Valoarea $J(\infty)$ a fost calculată utilizînd pachetul MATHEMATICA). Pentru $\tau >> 1$ funcţia de sub integrală în (2.1.36) posedă descompunerea asimptotică

$$\frac{1}{\sqrt{\tau^4+1}} \approx \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{2\tau^6} + \cdots, \quad \tau >> 1, \tag{2.1.37}$$

care fiind înlocuită în (2.1.36) conduce la reprezentarea asimptotică a lui $J(x)$.

$$J(x) = J(\infty) - \frac{1}{x} + \frac{1}{10x^5} + \cdots, \quad x >> 1. \tag{2.1.38}$$

Dat fiind că în descompunerea asimptotică (2.1.38) lipsesc termenii cu $1/x^2$, $1/x^3$ şi $1/x^4$, în reprezentarea asimptotică a funcţiei $J(x)$ în domeniul $x >> 1$ este suficient de limitat numai cu primii doi termeni. Eroarea admisă în acest caz este determinată de valoarea termenului al treilea din seria asimptotică (2.1.38) – $1/10x^5$. (seria (2.1.38) este o serie alternată) şi pentru $x = 10$, este deacum egală cu 10^{-6}!

Expunem în continuare calculele detaliate ale asimptoticei $J(x)$ cu funcţia de sub integrală de tipul (2.1.33) şi în calitate de exemplu concret vom studia comportarea asimptotică a integralei

$$J(x) = \int_0^x \frac{\ln\tau \, d\tau}{\sqrt{\tau^4+1}}. \tag{2.1.39}$$

În acest caz concret $\mu(\tau)=\ln\tau$, $\varphi(\tau)=1/\sqrt{\tau^4+1}$ şi funcţia $\varphi(\tau)$ pentru $\tau>>1$ este reprezentată prin descompunerea asimptotică (2.1.37). Reprezentăm (2.1.39) sub o formă comodă de obţinere a asimptoticii funcţiei $J(x)$ pentru $x>>1$.

$$J(x)=J(\infty)-\int_x^\infty \frac{\ln\tau d\tau}{\sqrt{\tau^4+1}}=-\int_x^\infty \frac{\ln\tau d\tau}{\sqrt{\tau^4+1}},\quad J(\infty)=\int_0^\infty \frac{\ln\tau d\tau}{\sqrt{\tau^4+1}}=0. \tag{2.1.40}$$

Valoarea $J(\infty)$ a fost calculată numeric, utilizând pachetul MATEHMATICA. Înlocuind descompunerea (2.1.37) în (2.1.40) şi efectuînd integrarea, ţinînd cont de valoarea integralei

$$\int_x^\infty \frac{\ln\tau}{\tau^k}d\tau=\frac{\ln x}{(k-1)x^{k-1}}+\frac{1}{(k-1)^2}\frac{1}{x^{k-1}},\quad k>1 \tag{2.1.41}$$

obţinem reprezentarea asimptotică a integralei (2.1.39) în domeniul $x>>1$. Limitîndu-ne numai cu primul termen în descompunerea (2.1.37), ţinînd cont de (2.1.41) vom scrie reprezentarea asimptotică pentru $J(x)$ (2.1.39) sub forma:

$$J(x)\approx-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+\cdots,\quad x>>1. \tag{2.1.42}$$

Vom analiza în continuare procedeele de obţinere a reprezentărilor asimptotice ale integralelor $J(x)$ (2.1.20) în cazurile când $J(x)\to\infty$ pentru $x\to\infty$.

Admitem, că reprezentarea asimptotică pentru $J(x)$ este cunoscută. Forma generală a unei aşa reprezentări, când $J(x)\to\infty$ pentru $x\to\infty$, are forma:

$$J(x)=\varphi_{-k}(x)+\varphi_{-k+1}(x)+\cdots+\varphi_{-1}(x)+C_0+\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots \tag{2.1.43}$$

în aşa fel că funcţiile cu indicele negativ $\varphi_{-k}(x)$ sunt mărimi infinit mari ($\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_{-r}(x)=\infty$, $r=1,2,\cdots,k$), iar cu indicii pozitivi sunt mărimi infinit mici ($\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_r(x)=0,\quad r=1,2,\cdots$) şi în plus

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_{-r+1}(x)}{\varphi_{-r}(x)}=0,\quad r=1,2,\cdots,k,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_{r+1}(x)}{\varphi_r(x)}=0,\quad r=1,2,\cdots \tag{2.1.44}$$

C_0 este o mărime constantă.

Condiţiile (2.1.44) sunt satisfăcute din cauza că seria (2.1.43) este asimptotică.

În continuare, pentru a construi descompuneri asimptotice pentru $J(x) \to \infty$ cînd $x \to \infty$ vom evalua numai funcţiile $\varphi_{-r}(x)$ ($r = 1, 2, \cdots, k$) şi constantei C_0

$$J(x) = \varphi_{-k}(x) + \varphi_{-k+1}(x) + \cdots + \varphi_{-1}(x) + C_0, \quad x >> 1. \tag{2.1.45}$$

Dat fiind că $\lim_{x\to\infty} \varphi_r(x) = 0$ pentru toţi $r > 0$, evidenţierea acestor termeni în descompunerea (2.1.43) este lipsită de sens practic.

Spre deosebire de procedeele descrise mai sus de obţinere a descompunerii asimptotice în cazul dat calcularea funcţiei $\varphi_{-r}(x)$ în reprezentarea asimptotică (2.1.45) poartă un caracter mai specific. Procedeele aplicate în continuare vor fi clare din analiza exemplului concret.

Vom studia comportarea asimptotică a integralei

$$J(x) = \int_0^x \sqrt{\tau^2 + 1}\, d\tau \tag{2.1.46}$$

pentru $x >> 1$. Ţinând cont de comportarea asimptotică a funcţiei de sub integrală $\sqrt{\tau^2 + 1} \approx \tau$ pentru $\tau >> 1$ şi reprezentarea $\sqrt{\tau^2+1} \equiv \tau + (\sqrt{\tau^2+1} - \tau) = \tau + 1/(\sqrt{\tau^2+1} + \tau)$ aducem $J(x)$ la forma:

$$J(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+1} + \tau}. \tag{2.1.47}$$

Expresia (2.1.47) este valabilă pentru toţi $x \geq 0$; dar pentru $x >> 1$, componenta $x^2/2$ în (2.1.47) este o mărime infinit de mare de ordin mai superior decât valoarea determinată de integrală. Prin urmare funcţia $x^2/2$ reprezintă termenul principal în descompunerea asimptotică a funcţiei $J(x)$ în domeniul $x >> 1$.

Pentru a obţine termenul al doilea în descompunerea (2.1.47) observăm că funcţia de sub integrală în (2.1.47) are comportarea asimptotică $\sim 1/2\tau$ pentru $\tau >> 1$ şi integrala de la această funcţie diverge logaritmic pentru $x \to \infty$. Separăm din funcţia de sub semnul integralei o funcţie mai simplă, dar cu aceleaşi asimptote pentru valori mari ale argumentului, şi integrala căreea are formă explicită. În cazul dat în calitate de funcţie cu aşa proprietăţi poate fi aleasă, spre exemplu, funcţia $f_0(\tau) = 1/(2\tau+1)$ ca şi funcţia iniţială $f_0(0) = 1$.

Reprezentînd funcţia de sub integrală în (2.1.47) sub forma

$$\frac{1}{\sqrt{\tau^2+1} + \tau} \equiv \frac{1}{2\tau+1} + \frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}+\tau} - \frac{1}{2\tau+1} = \frac{1}{2\tau+1} + \frac{2\tau}{(2\tau+1)(\sqrt{\tau^2+1}+\tau)(\tau+1+\sqrt{\tau^2+1})}.$$

şi înlocuind această expresie în (II.1.49) obţinem

$$J(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+\int_0^x \frac{2\tau d\tau}{(2\tau+1)(\sqrt{\tau^2+1}+\tau)(\tau+1+\sqrt{\tau^2+1})}. \tag{2.1.48}$$

Dat fiind că funcţia de sub integrala în (2.1.48) are asimptotica $\sim 1/4\tau^2$ pentru $\tau >> 1$, această integrală are valoarea finită pentru $x\to\infty$, notată în continuare prin $J_1(\infty)$. Pe de altă parte, expresia $\frac{1}{2}\ln(2x+1)=\frac{1}{2}\ln 2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)\approx\frac{\ln x}{2}+\ln\sqrt{2}$ pentru $x>>1$.

În rezultat obţinem reprezentarea asimptotică de tipul (2.1.45) pentru integrala (2.1.46)

$$\int_0^x \sqrt{\tau^2+1}d\tau \approx \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln x + C_0, \quad C_0=J_1(\infty)+\ln\sqrt{2}=0.596574, \quad x>>1. \tag{2.1.49}$$

Prezentăm valorile integralei $J(x)$ calculate pentru valorile argumentului $x=1; 5$ şi 10 după formula asimptotică (2.1.49): 1,09657; 13,9013 şi 51,7479 respectiv, în timp ce valorile exacte sunt: 1,14779; 13,9038 şi 51,7485.

Prin consecinţă reprezentarea asimptotică pentru $J(x)$ aproximează valoarea funcţiei $J(x)$ cu o mare exactitate deacuma pentru $x\geq 1$!