2.2 Analiza asimptotică a integralelor cu o singularitate slabă

Vom studia comportarea asimptotică a integralelor de tipul

$$J(\varepsilon)=\int_0^a f(\tau,\varepsilon)d\tau, \quad a>0, \quad 0<\varepsilon<<1 \tag{2.2.1}$$

în domeniul valorilor mici ale parametrului ε. Limita de sus a integralei poate fi şi infinită. Funcţia de sub integrală $f(\tau,\varepsilon)$ pentru $\varepsilon=0$ se transformă în infinit pentru $\tau\to 0$ şi în plus, integrala (2.2.1) pentru valori nule ale parametrului nu există. În aşa mod, pentru clasa studiată de funcţii $f(\tau,\varepsilon)$ de sub semnul integralei (2.2.1)

$$J(\varepsilon)>>1, \text{ pentru } \quad 0<\varepsilon<<1. \tag{2.2.2}$$

Aşa integrale sunt numite *integrale cu singularitate slabă*.

Analiza efectuată în continuare are drept scop studierea comportării asimptotice a funcţiei $J(\varepsilon)$ în domeniul $0<\varepsilon<<1$.

Forma generală a descompunerii asimptotice a funcţiei $J(\varepsilon)$ se prezintă sub forma

$$J(\varepsilon)=\sum_{r=-k}^{\infty}\varphi_r(\varepsilon), \quad k>0, \quad 0<\varepsilon<<1, \tag{2.2.3}$$

unde $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi_r(\varepsilon)=\infty$ pentru $r<0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi_r(\varepsilon)=0$ pentru $r>0$ şi $\varphi_0(\varepsilon)\equiv C_0$, unde C_0 – constantă finită, iar $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varphi_{r+1}(\varepsilon)/\varphi_r(\varepsilon))=0$ pentru toate valorile indicelui *r*.

În continuare pentru a construi descompunerile asimptoticene ne limităm numai la obţinerea părţii singulare şi constantei C_0 în descompunerea asimptotică (2.2.3), dat fiind că aportul terminilor $\varphi_r(\varepsilon)$ cu $r>0$ în valoarea funcţiei $J(\varepsilon)$ este neglijabil de mic pentru $\varepsilon\to 0$. În aceste aproximaţii reprezentarea asimptotică pentru $J(\varepsilon)$ poate fi scrisă sub forma:

$$J(\varepsilon)\approx\varphi_{-k}(\varepsilon)+\varphi_{-k+1}(\varepsilon)+\cdots+\varphi_{-1}(\varepsilon)+C_0, \quad 0<\varepsilon<<1. \tag{2.2.4}$$

Procedeul general de obţinere a formei explicite a funcţiei $\varphi_r(\varepsilon)$ $(r\le 0)$ în (2.2.4) poate fi descris în felul următor. Pentru funcţia de sub integrală $f(\tau,\varepsilon)$ construim reprezentarea asimptotică în vecinătatea punctului $\tau=0$.

$$f(\tau,\varepsilon)\approx f_{-k}(\tau,\varepsilon)+\cdots+f_{-1}(\tau,\varepsilon)+f_0(\tau,\varepsilon)+R(\tau,\varepsilon), \quad 0<\varepsilon<<1, 0\le\tau<<1, \tag{2.2.5}$$

în aşa mod ca integralele $\int_0^a f_r(\tau,\varepsilon)d\tau$ ($r=-k,-k+1,\cdots,0$) să poată fi exprimate sub forma unei funcţii analitice, şi în acelaşi timp fiind satisfăcute condiţiile reprezentării asimptotice $\lim_{\tau\to 0}(f_{r+1}(\tau,\varepsilon)/f_r(\tau,\varepsilon))=0$. $R(\tau,\varepsilon)$ este o mărime infinit mică în raport cu variabila τ, deci $\lim_{\tau\to 0} R(\tau,\varepsilon)=0$ şi în acelaşi timp $\left|\lim_{\varepsilon\to 0} f_r(0,\varepsilon)\right|=\infty$ pentru toate valorile indicelui $r=-1,-2,\cdots,-k$.

Menţionăm un caz particular dar important al dependenţei (2.2.4).

$$J(\varepsilon)\approx\frac{c_{-k}}{\varepsilon^k}+\frac{c_{-k+1}}{\varepsilon^{k-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{\varepsilon}+c_0,\quad 0<\varepsilon<<1 \tag{2.2.6}$$

caracteristic pentru funcţiile care posedă în zero un pol de ordinul k. În legătură cu aceasta prezintă interes definirea claselor funcţiilor de sub semnul integralei $f(\tau,\varepsilon)$ în (2.2.1), care duc la dependenţa $J(\varepsilon)$ de tipul (2.2.6) asemenea condiţiilor binecunoscute din cursurile de analiză matematică, care fiind satisfăcute de funcţia $f(\tau)$ transformă $J(\varepsilon)$ într-o funcţie analitică a parametrului ε, deci $J(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varepsilon^k$.

Calcule concrete ale reprezentărilor asimptotice (2.2.4) pentru $J(\varepsilon)$ vom efectua pentru clasa de funcţii de sub semnul integralei de tipul

$$f(\tau,\varepsilon)=\mu(\tau,\varepsilon)\,g(\tau,\varepsilon), \tag{2.2.7}$$

unde $\mu(\tau,\varepsilon)$ este o funcţie cu singularitate $\varepsilon=0$, în punctul $\varepsilon=0$ $\left(\left|\lim_{\tau\to 0}\mu(\tau,0)\right|=\infty\right)$, dar $g(\tau,\varepsilon)$ este o funcţie fără singularitate în zero pentru valoarea parametrului $\varepsilon=0$. În aplicaţii practice funcţiile $\mu(\tau,\varepsilon)$ aparţin clasei de funcţii de tipul

$$\frac{1}{(\tau+\varepsilon)^{\alpha}}\ (\alpha\ge 1),\qquad \frac{1}{(\tau^2+\varepsilon^2)^{\alpha}}\quad(\alpha\ge 0.5) \tag{2.2.8}$$

şi combinaţiile lor. Particularităţile calculelor vor deveni clare din exemplele studiate în continuare, care cuprind dependenţele $\mu(\tau,\varepsilon)$ (2.2.8).

Exemplul 2.2.1. Vom obţine reprezentarea asimptotică (2.2.4) pentru integralele de tipul

$$J(\varepsilon)=\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau+\varepsilon}d\tau,\quad \varphi(0)\ne 0,\quad 0<\varepsilon<<1. \tag{2.2.9}$$

În acest caz $\mu(\tau,\varepsilon)=1/(\tau+\varepsilon)$, iar funcţia $\varphi(\tau)$ o prezentăm sub forma

$$\varphi(\tau)\equiv\varphi(0)+(\varphi(\tau)-\varphi(0))=\varphi(0)+\varphi_1(\tau), \quad \varphi_1(\tau)\equiv\varphi(\tau)-\varphi(0), \quad \varphi_1(0)=0\,. \qquad (2.2.10)$$

Ținînd cont de (2.2.10) obţinem asimptotica pentru $J(\varepsilon)$.

$$J(\varepsilon)=\varphi(0)\ln\frac{1}{\varepsilon}+C_0,\ 0<\varepsilon<<1,\ C_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^1\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau+\varepsilon}d\tau+\varphi(0)\ln(1+\varepsilon)\right]=\int_0^1\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau}d\tau\neq\infty \qquad (2.2.11)$$

Menţionăm, că în procesul deducerii reprezentării (2.2.11) am utilizat numai condiţia $\varphi(0)\neq 0$, iar termenul principal al asimptoticei este determinat numai de valoarea $\varphi(0)$. Aşa dar, pentru toate funcţiile $\varphi(\tau)$, care în zero au aceleaşi valori şi pentru care $J(\varepsilon)$ există, comportarea asimptotică a funcţiei $J(\varepsilon)$ în aproximaţia termenului principal din descompunerea asimptotică (2.2.11) este una şi aceeaşi.

Exemplul 2.2.2. Pentru a determina influenţa creşterii gradului de singularitate a funcţiei de sub semnul integralei asupra comportării asimptotice a funcţiei $J(\varepsilon)$ cercetăm asimptotica integralelor de tipul

$$J(\varepsilon)=\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^2}d\tau\,, \quad \varphi(0)\neq 0, \quad 0<\varepsilon<<1. \qquad (2.2.12)$$

Cu convenţia existenţei derivatei de ordinul unu a funcţiei $\varphi(\tau)$ finită în zero reprezentăm această funcţie sub forma echivalentă $\varphi(\tau)\equiv\varphi(\tau)-\varphi(0)-\varphi'(0)\tau+$ $+\varphi(0)+\varphi'(0)\tau\equiv\varphi(0)+\varphi'(0)\tau+\varphi_1(\tau)$, $\varphi_1(\tau)\equiv\varphi(\tau)-\varphi(0)-\varphi'(0)\tau$, avînd $\varphi_1(0)=0$ şi $\varphi_1'(0)=0$ după construcţie. Înlocuind această reprezentare a lui $\varphi(\tau)$ în (2.2.12), şi ţinînd cont de valorile integralelor (din tabelă),

$$\int_0^1\frac{d\tau}{\tau+\varepsilon}=\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,,\ \int_0^1\frac{d\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{1+\varepsilon}\,,\ \int_0^1\frac{\tau d\tau}{(\tau+\varepsilon)^2}=\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}-1+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\ .$$

obţinem următoarea reprezentare asimptotică de tipul (2.2.4) pentru partea singulară a descompunerii $J(\varepsilon)$:

$$J(\varepsilon)=\varphi(0)\frac{1}{\varepsilon}+\varphi'(0)\ln\frac{1}{\varepsilon}+C_0, \quad 0<\varepsilon<<1, \quad C_0=-\varphi(0)-\varphi'(0)+\int_0^1\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^2}d\tau. \qquad (2.2.13)$$

Analogic pot fi obţinute reprezentările asimptotice pentru $J(\varepsilon)$ şi pentru exponenţi mai mari ai puterilor numitorului în (2.2.12).

Exemplul 2.2.3. Vom analiza comportarea asimptotică a integralelor de tipul

$$J(\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{\tau^2+\varepsilon^2}}d\tau\,,\quad \varphi(0)\neq 0\,,\quad 0<\varepsilon<<1\,. \tag{2.2.14}$$

Reprezentăm $\varphi(\tau)$ sub forma echivalentă $\varphi(\tau)\equiv\varphi(0)+(\varphi(\tau)-\varphi(0))=\varphi(0)+\varphi_1(\tau)$, $\varphi_1(\tau)\equiv\varphi(\tau)-\varphi(0)$, ($\varphi_1(0)=0$ după construcţie). Înlocuind această reprezentare pentru $\varphi(\tau)$ în (2.2.14) şi utilizînd valoarea tabulară a integralei $\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+\varepsilon^2}}=\ln\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

obţinem următoarea expresie pentru partea singulară a descompunerii asimptotice $J(\varepsilon)$:

$$J(\varepsilon)\approx\varphi(0)\ln\frac{1}{\varepsilon}+C_0,\quad C_0=\varphi(0)\ln 2+\int_0^1\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau}d\tau,\quad 0<\varepsilon<<1. \tag{2.2.15}$$

Exemplul 2.2.4. Vom obţine reprezentarea asimptotică pentru clasa de integrale

$$J(\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau^2+\varepsilon^2}d\tau\,,\quad \varphi(0)\neq 0\,,\quad 0<\varepsilon<<1, \tag{2.2.16}$$

cu convenţia că funcţia $\varphi(\tau)$ posedă o derivată finită în zero. Reprezentăm $\varphi(\tau)$ în forma echivalentă $\varphi(\tau)\equiv\varphi(0)+\varphi'(0)\tau+\varphi_1(\tau)$ unde $\varphi_1(\tau)\equiv\varphi(\tau)-\varphi(0)-\varphi'(0)\tau$ şi după construcţie $\varphi_1(0)=0$. Înlocuim această reprezentare pentru $\varphi(\tau)$ în (2.2.16) şi utilizăm valorile integralelor din tabelă $\int_0^1\frac{d\tau}{\tau^2+\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon}arctg\frac{1}{\varepsilon}$, $\int_0^1\frac{\tau d\tau}{\tau^2+\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$, cît şi asimptotica funcţiei $arctg\frac{1}{\varepsilon}\approx\frac{\pi}{2}$ pentru $0<\varepsilon<<1$. În rezultat pentru partea singulară a descompunerii funcţiei $J(\varepsilon)$ (2.2.16) pentru $0<\varepsilon<<1$ obţinem:

$$J(\varepsilon)\approx\frac{\pi\varphi(0)}{2\varepsilon}+\varphi'(0)\ln\frac{1}{\varepsilon}+C_0,\quad C_0=-\varphi(0)+\int_0^1\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau}d\tau,\quad 0<\varepsilon<<1. \tag{2.2.17}$$

În cazul, cînd şi funcţia $\varphi(\tau)$ din exemplul 2.2.1 – 2.2.4 posedă în punctul zero singularităţi, studierea comportarii asimptotice a funcţiei $J(\varepsilon)$ cere aplicarea unor procedee mai speciale. Să cercetăm un aşa exemplu.

Exemplul 2.2.5. Vom studia comportarea asimptotică a clasei de integrale

$$J(\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)\ln\tau}{\tau+\varepsilon}d\tau\,,\quad \varphi(0)\neq 0,\quad 0<\varepsilon<<1. \tag{2.2.18}$$

Reprezentăm funcţia $\varphi(\tau)$ ca în exemplul (2.2.1) sub forma echivalentă, $\varphi(\tau)\equiv\varphi(0)+\varphi_1(\tau)$ unde $\varphi_1(\tau)\equiv\varphi(\tau)-\varphi(0)$ şi, prin construcţie $\varphi_1(0)=0$.

Transcrim cu aceste transformări funcţia $J(\varepsilon)$:

$$J(\varepsilon)=\varphi(0)\int_0^1 \frac{\ln\tau}{\tau+\varepsilon}d\tau+J_1(\varepsilon)\,,\qquad J_1(\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\varphi_1(\tau)\ln\tau}{\tau+\varepsilon}d\tau\,,\quad \varepsilon>0\,. \tag{2.2.19}$$

Dat fiind că $\varphi_1(0)=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_1(\varepsilon)=J_1(0)$ şi $J_1(0)$ este funcţia finită, studierea comportarii asimptotice $J(\varepsilon)$ pentru $0<\varepsilon<<1$ se reduce la analiza asimptotică a integralei

$J_0(\varepsilon)=\int_0^1 \frac{\ln\tau d\tau}{\tau+\varepsilon}$ pentru $0<\varepsilon<<1$.

În integrala $J_0(\varepsilon)$ efectuăm schimbul de variabile $\tau=\varepsilon t$

$$J_0(\varepsilon)=\int_0^{1/\varepsilon} \frac{\ln\varepsilon t}{t+1}dt=-\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{1/\varepsilon}\frac{dt}{t+1}+\int_0^{1/\varepsilon}\frac{\ln t}{t+1}dt\,. \tag{2.2.20}$$

Valoarea primei integrale din partea dreaptă a expresiei (2.2.20) este $\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. În integrala a doua funcţia de sub integrală o reprezentăm sub forma comodă pentru integrare, separînd sub formă explicită comportarea ei asimptotică pentru $t>>1$:

$$\frac{\ln t}{t+1}\equiv\frac{\ln(t+1)}{t+1}+\varphi_1(t),\qquad \varphi_1(t)\equiv\frac{\ln t-\ln(t+1)}{t+1}\,. \tag{2.2.21}$$

Înlocuind (2.2.21) în (2.2.20) şi ţinînd cont de valoarea integralei $\int_0^{1/\varepsilon} \frac{\ln(t+1)dt}{t+1} = \frac{1}{2}\ln^2 \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$, obţinem descompunerea asimptotică a părţii singulare a funcţiei $J_0(\varepsilon)$ prin (2.2.20)

$$J_0(\varepsilon) \approx -\frac{1}{2}\ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + J_{01}, \qquad J_{01} = \int_0^{\infty} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau+1} d\tau, \quad 0 < \varepsilon << 1 \tag{2.2.22}$$

şi a integralei iniţiale $J(\varepsilon)$ din (2.2.18)

$$J(\varepsilon) \approx -\frac{1}{2}\varphi(0)\ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + C_0, \quad C_0 = \varphi(0)J_{01} + J_1(0), \quad 0 < \varepsilon << 1. \tag{2.2.23}$$

Menţionăm, că valoarea J_{01} este finită, dat fiin că $\varphi_1(t)/(t+1) \approx -1/t^2$ pentru $t >> 1$.

Aplicînd acest procedeu, pot fi cercetate expresiile asimptotice ale integralelor studiate în exemplele 2.2.1 – 2.2.4. Din cauza univocităţii descompunerilor asimptotice rezultatele în ambele cazuri vor coincide.