2.3. Metoda Laplace

În paragraful curent vom cerceta comportarea asimptotică a funcţiilor $F(\gamma)$, definite de *integralele Laplace.*

$$J(\gamma)=\int_a^b f(x)e^{\gamma S(x)}dx, \quad \gamma>0, \tag{2.3.1}$$

pentru valori mari ale parametrului γ $(\gamma>>1)$.

În (2.3.1) $f(x)$, $S(x)$ sunt funcţii reale cunoscute definite în intervalul $[a,b]$. Convenim, că pentru valoarea fixată a parametrului γ integrala (2.3.1) există.

Calcularea integralelor de tipul (2.3.1) într-o formă analitică închisă şi obţinerea reprezentării analitice pentru $J(\gamma)$, importantă pentru analiza problemelor fizice, este posibilă numai pentru o clasă restrânsă de funcţii $f(x)$, $S(x)$. Dar după cum vom vedea din expunerea în continuare, pentru valori mari a parametrului $\gamma\,(\gamma>>1)$ comportarea funcţiei $J(\gamma)$ este determinată numai de valorile funcţiei $S(x)$ în punctele unde îşi atinge valorile maxime, la fel şi valorile funcţiei $f(x)$ în aceleaşi puncte şi nu depinde de comportarea funcţiilor $f(x)$ şi $S(x)$ pe tot intervalul $[a,b]$. În consecinţă analiza asimptotică a integralelor (2.3.1) lărgeşte esenţial posibilităţile de reprezentare analitică a dependenţelor $J(\gamma)$, definite de integralele Laplace (2.3.1).

Atît metoda analizei asimptotice a integralelor (2.3.1) cît şi caracterul soluţiilor obţinute într-o mare măsură depind de comportarea calitativă a funcţiei $S(x)$ în intervalul $[a,b]$. În legătură cu aceasta vom examina două clase de funcţii $S(x)$. În prima clasă vom include funcţiile care variază monoton în intervalul $[a,b]$, şi ca consecinţă, pentru această clasă de funcţii

$$S'(x)\neq 0, \quad x\in[a,b]. \tag{2.3.2}$$

În a doua clasă vom include funcţiile care posedă în intervalul $[a,b]$ un punct extremal $x=c$, în care această funcţie capătă cea mai mare valoare:

$$S'(c)=0, \quad S''(c)<0, \quad c\in[a,b]. \tag{2.3.3}$$

Dacă $S(x)$ în intervalul $[a,b]$ posedă cîteva extremuri atunci intervalul $[a,b]$ întotdeauna poate fi descompus în numărul respectiv de intervale, în fiecare din ele fiind satisfăcută numai una din condiţiile: (2.3.2) sau (2.3.3).

În continuare vom efectua analiza integralelor Laplace pentru fiecare clasă de funcţii $S(x)$ aparte.

Asimptotica integralelor Laplace. $\boldsymbol{S'(x) \neq 0,\ x \in [a,b]}$. Cea mai simplă funcţie din clasa studiată este funcţia liniară $S(x) = -x$, $[S'(x) \equiv -1 \neq 0]$. Vom studia comportarea asimptotică a integralei

$$J(\gamma) = \int_0^\infty f(x) e^{-\gamma x} dx, \quad \gamma > 0. \tag{2.3.4}$$

Expresia (2.3.4) reprezintă transformarea Laplace pentru funcţia $f(x)$. Transformarea Laplace are o aplicare largă în studierea problemelor ce ţin de răspîndirea proceselor undulare şi difuzia termică în medii continui. Aşa dar, evaluarea formei analitice a funcţiei $F(\gamma)$ are şi un interes de sine-stătător.

Pentru cazul când $f(x)$ este o funcţie analitică determinarea dependenţa $J(\gamma)$ este cea mai simplă.

Orice funcţie analitică poate fi reprezentată sub forma unei serii de puteri:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{2.3.5}$$

Înlocuind (2.2.5) în (2.3.4) obţinem reprezentarea funcţiei $J(\gamma)$

$$J(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{\gamma^{k+1}}. \quad \gamma > 0. \tag{2.3.6}$$

Pentru $\gamma >> 1$ din (2.3.6) se obţine seria asimptotică pentru $J(\gamma)$

$$J(\gamma) \approx \frac{f(0)}{\gamma} + \frac{f'(0)}{\gamma^2} + \cdots, \quad \gamma >> 1. \tag{2.3.7}$$

Limitarea numai cu primii doi-trei termeni în descompunerea asimptotică (2.3.7) deja pentru valori nu prea mari a parametrului γ conduce la erori neglijabile în asimptotica funcţiei $J(\gamma)$.

Aşa, spre exemplu, pentru funcţia $f(x) = e^{-x^2}$ $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$ şi potrivit expresiei (2.3.7)

$$J(\gamma) = \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-\gamma x} dx \approx \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{\gamma^3}, \qquad \gamma >> 1.$$

Şi deacuma pentru $\gamma = 10$ valoarea asimptotică calculată cu ajutorul formulei scrise $J(10) \approx 0{,}098000$, în timp ce calculul direct al integralei dă: $J(10) = 0{,}098109$.

Sub forma explicită poate fi construită şi descompunerea asimptotică a integralei Laplace (2.3.4) pentru clasa de funcţii de tipul:

$$f(x) = \mu(x)\,\varphi(x), \tag{2.3.8}$$

unde $\varphi(x)$ este o funcţie analitică iar $\mu(x)$ este o funcţie cu singularităţi în punctul zero. Se presupune că integrala Laplace (2.3.4) cu $f_k(x) = \mu(x)x^k$, $k = 0,1,2,\ldots$ se calculează sub formă analitică închisă.

Aşa spre exemplu, dacă $\mu(x) = x^\alpha, \alpha > -1$ şi $\alpha \neq n$ (n este un număr întreg), atunci (ţinînd cont de reprezentarea (2.3.5) pentru funcţia analitică) şi valoarea integralelor

$$\int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma^{n+\alpha+1}} \int_0^\infty \tau^{n+\alpha} e^{-\tau} d\tau = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\gamma^{n+1+\alpha}}$$

($\Gamma(p)$ este funcţia gamma de argumentul real p). Reprezentarea integralei Laplace în acest caz se scrie sub forma

$$J(\gamma) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\gamma^{k+1+\alpha}}, \quad \gamma > 0 \tag{2.3.9}$$

comodă pentru obţinerea descompunerilor asimptotice. În particular, pentru $\gamma >> 1$ termenul principal al descompunerii asimptotice capătă forma:

$$J(\gamma) \approx \varphi(0) \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\gamma^{1+\alpha}}, \quad \gamma >> 1. \tag{2.3.10}$$

Pentru evaluarea eficacităţii reprezentării asimptotice (2.3.10) aducem valorile integralei $\int_0^\infty \frac{e^x e^{-\gamma x}}{\sqrt{x}} dx$, calculată nemijlocit pentru două valori ale parametrului $\gamma_1 = 10$ şi $\gamma_2 = 100$: $J(\gamma_1) = 0.590818$, $J(\gamma_2) = 0.178138$ şi din formula asimptotică (2.3.10): $J(\gamma_1) \approx 0.560500$, $J(\gamma_2) \approx 0.177245$.

Limitîndu-ne numai cu primii doi termeni în seria asimptotică (2.3.9) pentru reprezentarea asimptotică $J(\gamma)$ şi valorile $\gamma \geq 10$ obţinem rezultate care practic coincid cu calculele exacte ale funcţiei $J(\gamma)$.

Cu scopul de a evalua influenţa caracterului singularităţii funcţiei $\mu(x)$ în (2.3.8) asupra comportării integralei Laplace vom obţine asimptotica $J(x)$, cînd $\mu(x) = \ln x$, $\varphi(x)$ fiind o funcţie analitică. Înlocuind în (2.3.4) $f(x)$ din clasa (2.3.8) şi ţinînd cont de descompunerea (2.3.5) pentru reprezentarea funcţiei $J(\gamma)$ obţinem:

$$J(\gamma)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(\gamma), \quad \varphi_k(\gamma)=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int_0^{\infty}\tau^k \ln\tau\, e^{-\gamma\tau}d\tau . \qquad (2.3.11)$$

Întroducem notaţia $I_k(\gamma)\equiv\int_0^{\infty}\tau^k \ln\tau\, e^{-\gamma\tau}d\tau$ şi efectuăm schimbul de variabile $\gamma\tau=t$. Obţinem

$$I_k(\gamma)=\frac{\ln\gamma}{\gamma^{k+1}}\Gamma(k+1)+\frac{C_k}{\gamma^{k+1}}, \text{ unde } C_k(\gamma)\equiv\int_0^{\infty}t^k \ln t\, e^{-t}dt .$$

Constantele C_k satisfac relaţia de recurenţă $C_k=kC_{k-1}+\Gamma(k)$, dedusă prin calcularea integralei C_k, aplicînd formula integrării prin părţi. În particular, păstrînd numai primii doi termeni în descompunerea asimptotică obţinem:

$$J(\gamma)\approx\varphi(0)\frac{\ln\gamma}{\gamma}+\varphi(0)\frac{C_0}{\gamma}, \quad \gamma>>1, \qquad (2.3.12)$$

unde $C_0(\gamma)\equiv\int_0^{\infty}\ln t\, e^{-t}dt$ este constanta lui Euler.

Menţionăm, că toate descompunerile asimptotice, obţinute mai sus pentru integralele Laplace (2.3.4) cu limita de sus de integrare infinită, rămân valabile şi pentru aceste integrale cu limita de sus finită şi egală cu *a*. Această afirmaţie urmează din reprezentarea integralei Laplace (2.3.4) definită în liumite finite sub forma echivalentă şi comodă pentru analiza asimptotică:

$$J(\gamma)=\int_0^{a} f(x)e^{-\gamma x}dx\equiv\int_0^{\infty} f(x)e^{-\gamma x}dx-\int_a^{\infty} f(x)e^{-\gamma x}dx . \qquad (2.3.13)$$

Analiza detaliată a primei integrale în partea dreaptă (2.3.13) a fost efectuată mai sus. Pentru integrala (2.3.13) aplicăm formula de integrare prin părţi şi o scrim sub forma echivalentă

$$\int_a^{\infty} f(x)e^{-\gamma x}dx\equiv\frac{f(a)e^{-\gamma a}}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\int_a^{\infty} f'(x)e^{-\gamma x}dx \qquad (2.3.14)$$

valabilă *pentru toate valorile* $\gamma>0$. Pentru $\gamma>>1$ primul termen din partea dreaptă a expresiei (2.3.14) reprezintă termenul principal al descompunerii asimptotice a integralei cercetate. Dat fiind că acest termen descreşte exponenţial cu creşterea lui γ el reprezintă o mărime infinit de mică în raport cu orice termen al descompunerilor asimptotice de mai sus.

În consecinţă, pentru $\gamma>>1$ aportul integralei (2.3.14) în valoarea funcţiei $J(\gamma)$ (2.3.13) este exponenţial mic. Prin urmare, în această aproximaţie descompunerile asimptotice ale integralei Laplace (2.3.13) şi (2.3.4) coincid pentru toate clasele funcţii $f(x)$.

În continuare trecem la analiza asimptotică a integralelor Laplace (2.3.1) pentru funcţiile $S(x)$ strict monotone în intervalul $[a,b]$.

Pentru concretizare vom conveni, că $S(x)$ este o funcţie monoton descrescătoare şi deci $S'(x)<0$ pentru $x\in[a,b]$.

Întroducem o variabilă nouă τ definită prin condiţia

$$S(x)=S(a)+S'(a)\tau\,. \tag{2.3.15}$$

Pentru $x=a$, $\tau_a=0$ şi pentru $x=b$ $\tau_b=-(S(b)-S(a))/S'(a)>0$. Integrala Laplace (2.3.1) cu această substituţie capătă forma

$$J(\gamma)=e^{\gamma S(a)}\int_0^{\tau_b} f(x(\tau))e^{-\lambda\tau}x'(\tau)d\tau,\quad \lambda=-\gamma\, S'(a)\,, \tag{2.3.16}$$

unde $x(\tau)$ este o dependenţă definită de substituţia variabilelor (2.3.15).

Convenim ca substituţia de variabile (2.3.15) să reprezinte definiţia funcţiei $x(\tau)$ sub formă implicită:

$$F(x,\tau)\equiv S(x)-S(a)-S'(a)\tau=0\,. \tag{2.3.17}$$

O analiză detaliată a dependenţelor $x(\tau)$ definite sub o formă implicită de tipul (2.3.17) a fost efectuată în Capitolul 1.

Convenim că $S'(a)\neq 0$ şi că funcţia $S(x)$ posedă un număr necesar de derivate de ordin superior în punctul a:

Dat fiind, că $F(a,0)=0$ (din (2.3.17)), dependenţa $x(\tau)$ se prezintă sub forma

$$x(\tau)=a+\alpha_1\tau+\alpha_2\tau^2+\alpha_3\tau^3+\cdots\,. \tag{2.3.18}$$

Metoda de calculare a coeficienţilor descompunerii $x(\tau)$ după puterile lui τ a fost descrisă detaliat în Capitolul 1. Aici vom determina sub o formă explicită numai coeficienţii α_1 şi α_2. În acest scop înlocuim în (2.3.15) dsecompunerea în seria Taylor a funcţiei $S(x)$ (convenind că ea există).

$$S(a)+S'(a)(x-a)+\frac{S''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{S'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots=S(a)+S'(a)\tau\,, \tag{2.3.19}$$

iar în partea stîngă a acestei egalităţi înlocuim $x-a$ din (2.3.18), transformând (2.3.19) într-o identitate în raport cu τ. Egalînd coeficienţii de pe lîngă aceleaşi puteri a le lui τ în partea dreaptă şi stîngă a identităţii (2.3.19) obţinem $\alpha_1=1$,

$\alpha_2 = -\frac{S''(a)}{2S'(a)}$, ... şi în consecinţă

$$x(\tau) = a + \tau - \frac{S''(a)}{2S'(a)}\tau^2 + \frac{3S''^2(a) - S'''(a)S'(a)}{6S'^2(a)}\tau^3 + \cdots . \quad (2.3.20)$$

Ţinînd cont de expresia explicită a funcţiei $x(\tau)$ integrala Laplace (2.3.16) în aproximaţia factorilor $e^{\gamma S(a)}$ se reduce la forma (2.3.13). Prin urmare, analiza asimptotică a integralelor (2.3.16) şi (2.3.1) ($S'(x) \neq 0,\, x \in [a,b]$) poate fi executată aplicînd descompunerile asimptotice ale integralelor Laplace (2.3.4), obţinute pentru diferite clase de funcţii $f(x)$.

În particular, termenul principal al asimptoticii integralelor Laplace (2.3.1) pentru clasa de funcţii cu $f(a) \neq 0$ se scrie sub forma:

$$J(\gamma) \approx \frac{f(a)e^{\gamma S(a)}}{\gamma |S'(a)|}, \quad f(a) \neq 0, \quad \gamma >> 1. \quad (2.3.21)$$

Vom efectua în continuare analiza asimptotică a integralelor Laplace (2.3.1) cu funcţia $S(x)$ din clasa (2.3.3).

Asimptotica integralelor Laplace. $\boldsymbol{S'(c) = 0,\, S''(c) < 0,\, a \leq c \leq b}$. Fie că funcţia $S(x)$ din clasa examinată de funcţii în intervalul $[a,b]$ posedă un singur extremum în punctul $x = c$, în care ea îşi atinge valoarea maximală. Deci în acest punct $S'(c) = 0$ şi $S''(c) < 0$. Vom separa două cazuri. În primul caz punctul extremal este în interiorul intervalului $[a,b]$, iar în al doilea – punctul extremal coincide cu unul din capetele intervalului $[a,b]$.

Vom începe cu expunerea cazului cînd $S(x)$ îşi atinge valoarea maximală într-un punct din interiorul segmentului $[a,b]$ ($a < c < b$). Vom studia integrala de tipul

$$J(\gamma) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x) e^{-\gamma x^2} dx, \quad \gamma > 0. \quad (2.3.22)$$

După cum vom vedea în continuare toate integralele care conţin funcţii $S(x)$ din clasa (2.3.3) pot fi aduse la forma (2.3.22) şi în consecinţă, obţinerea descompunerilor asimptotice pentru integrala Laplace (2.3.22) rezolvă problema analizei asimptotice a integralelor (2.3.1).

Descompunerile asimptotice ale integralelor (2.3.23) sunt mai simple pentru cazul, cînd funcţia de sub integrală posedă derivate de ordinul n, diferite de zero în punctul $x = 0$. Atunci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \qquad (2.3.23)$$

unde $R_n(x)$ este restul de oprdinul *n* al seriei de puteri. Înlocuind (2.3.23) în (2.3.22) şi ţinînd cont de faptul că $\int_{-\infty}^{-\infty} x^{2p} e^{-\gamma x^2} dx = \frac{(2p-1)!!}{2^p} \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^{(2p+1)/2}}$ obţinem:

$$J(\gamma) = \sum_{p=0}^{m} \frac{\sqrt{\pi} c_p}{2^p} \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} \frac{1}{\gamma^{\frac{2p+1}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty} R_{2m} e^{-\gamma x^2} dx,\ c_p = (2p-1)!!,\ p \geq 1,\ c_0 = 1,\ \gamma > 0. \qquad (2.3.24)$$

În particular, cînd $f(x)$ este o funcţie analitică atunci în (2.3.23) restul de ordinul n $R_n(x)$ al seriei poate fi omis dacă egalăm cu infinit limita de sus a sumei.

Expresia (II.3.24) capătă forma:

$$J(\gamma) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} c_p}{2^p} \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} \frac{1}{\gamma^{\frac{2p+1}{2}}}, \quad c_0 = 1, c_p = (2p-1)!!, \gamma > 0. \qquad (2.3.25)$$

Reprezentările (2.3.24) (în cazul cînd $f(x)$ posedă numai n derivate) şi (2.3.25) (în cazul cînd $f(x)$ este analitică) sunt valabile pentru toate valorile $\gamma > 0$. Dar în cazul cînd $\gamma >> 1$ ambele reprezentări sunt comode pentru a obţine valori numerice pentru integrala Laplace. Spre exemplu, limitîndu-ne în (2.3.24) sau (2.3.25) numai cu primii doi termeni, obţinem valorile integralelor apropiate de cele exacte. În particular, termenul principal în reprezentarea asimptotică are forma:

$$J(\gamma) \approx f(0) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}, \quad f(0) \neq 0, \quad \gamma >> 1. \qquad (2.3.26)$$

Vom analiza în continuare cazul, cînd punctul extremal al funcţiei $S(x)$ coincide cu unul din capetele intervalului $[a,b]$.

Convenind, pentru certitudine, că $c = a$, vom examina integrala Laplace de tipul:

$$J(\gamma) = \int_{0}^{\infty} f(x) e^{-\gamma x^2} dx, \quad \gamma > 0. \qquad (2.3.27)$$

Printr-o substituţie simplă $x = \sqrt{\tau}$ integrala Laplace (2.3.27) se aduce la forma

$$J(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{f(\sqrt{\tau}) e^{-\gamma\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau, \quad \gamma > 0, \qquad (2.3.28)$$

care coincide cu integrala Laplace (2.3.4) şi, ca urmare, analiza asimptotică a integralelor (2.3.28) poate fi efectuată, aplicând rezultatele, obţinute la studierea dependenţei (2.3.4).

Pentru a putea utiliza nemijlocit rezultatele obţinute pentru descompunerile asimptotice ale integralei (2.3.4), reprezentăm mai întîi funcţia $f(\sqrt{\tau})$ din (2.3.28) sub forma:

$$f(\sqrt{\tau}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} \sqrt{\tau}^{\,2p} + \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} \sqrt{\tau}^{\,2p+1} + r_{2n+1}(\sqrt{\tau}) \tag{2.3.29}$$

separînd aparte termenii puterilor pare şi impare a $\sqrt{\tau}$ (admiţînd existenţa derivatelor funcţiei $f(x)$ în punctul $x=0$ până la ordinul $2n+1$ inclusiv). $r_{2n+1}(\sqrt{\tau})$ restul de ordinul $n+1$ al seriei de puteri. Înlocuind (2.3.29) în (2.3.28) obţinem reprezentarea pentru $J(\gamma)$:

$$J(\gamma) = J_{n1}(\gamma) + J_{n2}(\gamma) + R_n(\gamma) \tag{2.3.30}$$

$$J_{n1}(\gamma) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{2p}(0)}{(2p)!} \frac{\Gamma(p+1/2)}{\gamma^{p+1/2}}, \quad J_{n2}(\gamma) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{2p+1}(0)}{(2p+1)!} \frac{\Gamma(p+1)}{\gamma^{p+1}}, \quad R_n(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{r_{2n+1}(\tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\gamma\tau} d\tau .$$

În sfîrşit, trecem la analiza asimptotică a integralelor Laplace (2.3.1) pentru cazul cînd $S(x)$ îşi atinge valoarea maximală în punctul interior al intervalului $[a,b]$ ($x = c \in [a,b]$). În plus mai convenim, că funcţia $S(x)$ posedă în punctul $x = c$ numărul necesar de derivate, care va fi determinat pe parcursul expunerii subiectului.

Întroducem variabila nouă τ prin condiţia

$$S(x) = S(c) + \frac{S''(c)}{2} \tau^2 , \quad S''(c) < 0 \tag{2.3.31}$$

şi vom considera (2.3.31) drept forma implicită de definire a funcţiei $x(\tau)$. Menţionăm, că (2.3.31) reprezintă expresia exactă, care reflectă faptul, că o funcţie arbitrară în vecinătatea punctului său extremal poate fi adusă la o formă pătratică printr-un schimb de variabile (lema lui Morse)

În cazul cînd funcţia $S(x)$ este analitică în vecinătatea punctului $x = c$ şi $S'(c) = 0$ şi, prin urmare, posedă o descompunere în seria de puteri:

$$S(x) = S(c) + \frac{S''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{S'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots , \tag{2.3.32}$$

funcţia $x = x(\tau)$ poate fi construită în forma explicită.

Mai întîi menţionăm, că valorii $x = c$ îi corespunde $\tau_c = 0$ şi, prin urmare $\tau(c) = 0$. Pentru $x = a$, $\tau = \tau_a = -\sqrt{-2(S(c) - S(a))/S''(c)}$, iar pentru $x = b$, $\tau = \tau_b = \sqrt{-2(S(b) - S(c))/S''(c)}$. Dependenţa $x(\tau)$ o căutăm sub forma

$$x(\tau) = c + \tau + \alpha_2 \tau^2 + \alpha_3 \tau^3 + \cdots. \tag{2.3.33}$$

Înlocuind (2.3.33) în partea stîngă a ecuaţiei(2.3.31) şi ţinînd cont de descompunerea în seria de puteri (2.3.32) a funcţiei $S(x)$ o transformăm într-o indentitate în raport cu variabila τ. Egalând coeficienţii de pe lângă aceleaşi puteri ale lui τ în părţile stîngă şi dreaptă a acestei identităţi obţinem relaţiile pentru calcularea coeficienţilor necunoscuţi α_k din (2.3.33). În particular pentru primii doi coeficienţi α_2 şi α_3 obţinem

$$\alpha_2 = -\frac{S'''(c)}{3!\,S''(c)}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{3!^2\,2}\left(\frac{S'''(c)}{S''(c)}\right)^2 - \frac{S^{(4)}(c)}{4!\,S''(c)}. \tag{2.3.34}$$

Referitor la reprezentarea funcţiei $x(\tau)$ sub forma (2.3.33) este necesar de menţionat următoarele: dat fiind că în conformitate cu (2.3.31) $x(\tau)$ este determinată sub forma implicită de funcţia $F(x,\tau) = 0$, unde $F(x,\tau) \equiv S(x) - S(c) - S''(c)/2 = 0$, iar condiţia de existenţă a funcţiei $x(\tau)$ ($F'_x(x,\tau) \neq 0$) nu este satisfăcută în punctul $x = c$, $\tau = 0$, în vecinătatea acestui punct dependenţa $x(\tau)$ trebuie căutată sub formă de descompunere în serie după puterile fracţionare ale lui $x(\tau)$ cum s-a efectuat în §I.4. Calculele nemijlocite arată că dependenţa $x(\tau)$ în cazul menţionat are forma (2.3.33).

În consecinţă, integrala Laplace (2.3.1) pentru clasa studiată de funcţii $S(x)$ şi cu schimbul de variabile (2.3.33) poate fi scrisă sub forma

$$J(\gamma) = e^{\gamma S(c)} \int_{-\tau_a}^{\tau_b} f(x(\tau)) e^{\gamma \frac{S''(c)}{2}\tau^2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad S''(c) < 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.3.35}$$

Extindem limitele de sus şi de jos în (2.3.35) până la $+\infty$ şi $-\infty$ respectiv şi transcriem această integrală sub forma echivalentă

$$J(\gamma) = e^{\gamma S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x(\tau)) e^{\gamma \frac{S''(c)}{2}\tau^2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau + R_{ab}(\gamma), \quad S''(c) < 0, \quad \gamma > 0, \tag{2.3.36}$$

unde $R_{ab}(\gamma) = -e^{\gamma S(c)} \left(\int_{-\tau_b}^{\infty} f(x(\tau)) e^{\gamma \frac{S''(c)}{2}\tau^2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\tau_a} f(x(\tau)) e^{\gamma \frac{S''(c)}{2}\tau^2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau \right).$

Reprezentarea (2.3.36) este valabilă *pentru toţi* $\gamma > 0$. Totodată pentru $\gamma >> 1$ mărimea $|R_{ab}(\gamma)| << 1$ şi deci asimptotic

$$J(\gamma) \approx e^{\gamma S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x(\tau)) e^{\gamma \frac{S''(c)}{2}\tau^2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad S''(c) < 0, \quad \gamma >> 1. \tag{2.3.37}$$

Pentru conformitate, vom estima valoarea lui $R_{ab}(\gamma)$ pentru $\gamma >> 1$, aplicînd formula integrării prin părţi pentru a calcula integralele din $R_{ab}(\gamma)$. În rezultat obţinem

$$R_{ab}(\gamma) \approx \frac{1}{\gamma S''(c)} \left(-\frac{f(a) e^{-\gamma S(a)} x'(a)}{\tau_a} + \frac{f(b) e^{-\gamma S(b)} x'(b)}{\tau_b} \right), \quad \gamma >> 1 \tag{2.3.38}$$

şi deci $R_{ab}(\gamma)$ descreşte exponenţial cu creşterea parametrului γ.

Analiza asimptotică a integralei Laplace (2.3.37) se efectuează analogic cu analiza integralei (2.3.22).

În particular, dacă valoarea $f(c)$ este finită şi diferită de zero, atunci termenul principal al descompunerii asimptotice a integralei (2.3.37) capătă forma

$$J(\gamma) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(c)}} \frac{f(c)}{\sqrt{\gamma}} e^{\gamma S(c0}, \quad S''(c) < 0, \quad \gamma >> 1. \tag{2.3.39}$$

Vom prezenta în continuare calculul detaliat a formei explicite pentru termenul următor din seria asimptotică a integralei Laplace (2.3.37) pentru clasa de funcţii $f(x)$, analitice în vecinătatea punctului $x = c$:

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots . \tag{2.3.40}$$

Ţinînd cont de expresia (2.3.33) pentru $x(\tau)$ şi reprezentarea (2.3.40) pentru $f(x)$, expresia (2.3.37) se scrie sub forma

$$J(\gamma) = e^{\gamma S(c)} \int_{-\infty}^{\infty} (f(c) + c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots) e^{\gamma \frac{S''(c)}{2}\tau^2} d\tau, \quad S''(c) < 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.3.41}$$

Vom scrie expresiile explicite ale coeficienţilor

$$c_1 = f'(c) + 2\alpha_2 f(c), \quad c_2 = \frac{f''(c)}{2} + 3\alpha_2 f'(c) + 3\alpha_3 f(c), \tag{2.3.42}$$

unde α_2 şi α_3 se calculează din formulele (2.3.34).

În procesul integrării termen cu nermen în (2.3.41) obţinem, că toate integralele care conţin τ la o putere impară sunt zero, iar celelalte ne dau reprezentarea asimptotică a funcţiei $J(\gamma)$

$$J(\gamma)\approx\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(c)}}\frac{f(c)}{\sqrt{\gamma}}e^{\gamma S(c0}\left(1-\frac{c_2}{f(c)S''(c)}\frac{1}{\gamma}+\cdots\right),\quad S''(c)<0,\quad \gamma>>1. \qquad (2.3.43)$$

În continuare vom descri cîteva exemple de obţinere a aproximaţiilor asimptotice ale integralelor prin metoda Laplace. Menţionăm, că într-o serie de exemple, tratate în continuare, suntem nevoiţi să aplicăm procedee speciale. Prin aceasta metodele şi rezultatele rezolvării acestor exemple completează conţinutul textului de bază.

Exemplul 2.3.1. Vom obţine terrmenii principali ai descompunerii asimptotice pentru integralele de tipul

$$J(\gamma)=\int_0^a f(x)\big(g(x)\big)^{\gamma}dx,\quad g(x)>0,\ g'(x)\neq 0,\quad a>0. \qquad (2.3.44)$$

Pentru $\gamma>>1$ convenim, că $f(x)$ este o funcţie analitică, iar $g(x)$ este o funcţie monoton descrescătoare în intervalul $x\in[a,b]$.

Aducem integrala (2.3.34) la forma integralei Laplace (2.3.1) reprezentînd factorul pe lîngă $f(x)$ în (2.3.44) sub forma $\big(g(x)\big)^{\gamma}=\exp(\gamma\ln g(x))$ şi aplicăm procedeul standard descris mai sus pentru analiza asimptotică a integralei Laplace. În cazul dat $S(x)=\ln g(x)$ şi această funcţie aparţine clasei de funcţii, definite de condiţia (2.3.2). Pentru această clasă de funcţii integrala (2.3.44) se reduce la forma (2.3.16):

$$J(\gamma)=e^{\gamma S(0)}\int_0^{\tau_a} f(x(\tau))e^{\gamma\frac{S''(0)}{2}\tau}\frac{dx(\tau)}{d\tau}d\tau,$$

unde $x(\tau)$ se calculează în conformitate cu (2.3.20), iar termenul principal în descompunerea asimptotică a funcţiei se calculează din (2.3.21). În acest caz particular se obţine forma:

$$J(\gamma)\approx\frac{f(0)g(0)^{\gamma+1}}{-\gamma g'(0)},\quad f(0)\neq 0,\quad \gamma>>1. \qquad (2.3.45)$$

Exemplul 2.3.2. Vom obţine termenul principal al descompunerii asimptotice ale integralelor de tipul

$$J(\gamma)=\int_a^b f(x)(g(x))^{\gamma}dx, \quad g(x)>0,\ g'(x_0)=0,\ g''(x_0)<0, \quad a<x_0<b \qquad (2.3.46)$$

pentru $\gamma >>1$, iar x_0 fiind punct unic al maximumului funcţiei $g(x)$.

Ca şi în cazul precedent transformăm (2.3.46) la forma integralei Laplace. În acest caz funcţia $S(x)=\ln g(x)$ aparţine clasei de funcţii descrise de condiţia (2.3.3). Termenul principal al asimptoticii acestui tip de integrale este dat de expresia (2.3.39), care în cazul dat capătă forma:

$$J(\gamma)\approx f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-\gamma g''(x_0)}}(g(x_0))^{\gamma+\frac{1}{2}}, \quad g''(c)<0, \quad \gamma>>1. \qquad (2.3.47)$$

Exemplul 2.3.3. Vom obţine reprezentarea asimptotică pentru funcţia Γ:

$$\Gamma(\gamma+1)=\int_0^{\infty} x^{\gamma}e^{-x}dx. \qquad (2.3.48)$$

pentru valori mari ale parametrului γ ($\gamma >>1$). Specifica acestui exemplu constă în faptul că metoda Laplace nu poate fi aplicată direct pentru a analiza integrala (2.3.48). Ca şi în exemplul 2.3.1 cu transformarea $x^{\gamma}=\exp(\gamma\ln x)$ ($x>0$) aducem (2.3.48) la integrala de tip Laplace

$$\Gamma(\gamma+1)=\int_0^{\infty} x^{\gamma}e^{-x}dx=\int_0^{\infty} e^{\gamma\ln x-x}dx=\int_0^{\infty} e^{S(\gamma,x)}dx, \qquad (2.3.49)$$

în care spre deosebire de reprezentarea standardă (2.3.1), parametrul γ este inclus în definiţia funcţiei $S(\gamma,x)$. Funcţia $S(\gamma,x)\equiv\gamma\ln x-x$ pe toată semiaxa $x\geq 0$ posedă un singur punct $x(\gamma)=\gamma$ în care ea atimge cea mai mare valoare. Poziţia acestui punct se schimbă odată cu varierea parametrului γ. Acest termen este întâlnit frecvent în construirea aproximaţiilor asimptotice ale integralelor. În aşa cazuri se recomandă de efectuat o aşa transformare a variabilelor $x=\varphi(\gamma,\tau)$ în rezultatul căreea poziţia punctului maximumu funcţiei $S(\gamma,x)$ se fixează şi analiza asimptoticei a integralei se simplifică mult.

În cazul studiat întroducem schimbul de variabile $x=\gamma\tau$ şi aducem (2.3.49) la forma:

$$\Gamma(\gamma+1)=\gamma^{\gamma+1}\int_0^{\infty} e^{\gamma(\ln\tau-\tau)}d\tau, \qquad (2.3.50)$$

în care integrala din partea dreaptă a expresiei (2.3.50) aparţine deacuma clasei de integrale Laplace (2.3.1), în care $a=0$, $b=\infty$, $f(\tau)\equiv 1$, $S(\tau)\equiv \ln\tau-\tau$. Funcţia $S(\tau)$ în intervalul ($0,\infty$) posedă un singur punct $\tau_0=1$, în care îşi atinge cea mai mare valoare $S(1)=-1$, iar aproximaţia asimptotică a integralelor, care aparţin acestei clase este dată de expresia (2.3.43).

În cazul examinat $S(1)=1$, $S''(1)=-1$, $S'''(1)=2$, $S^{(4)}(1)=-6$, $c_2=3\alpha_3=$ $=3\left(\frac{5\cdot 4}{2\cdot 3!^2}-\frac{6}{4!}\right)=\frac{1}{12}$ [vezi (2.3.34)] şi în rezultat obţinem reprezentarea asiptotică pentru funcţia Γ;

$$\Gamma(\gamma+1)=\int_0^\infty x^\gamma e^{-x}dx\approx\sqrt{2\pi\gamma}\,\gamma^\gamma e^{-\gamma}\left(1+\frac{1}{12\gamma}+\cdots\right),\quad \gamma>>1. \tag{2.3.51}$$

În particular pentru $\gamma=n$ (n fiind un număr întreg) expresia (2.3.51) se transformă în cunoscuta reprezentare asiptotică a lui Stirling pentru factorialul numerelor întregi.

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+\cdots\right),\quad n>>1. \tag{2.3.52}$$

Menţionăm, că deja pentru $n=1$ calculele după formula (2.3.52) ne conduc la valoarea 0,998982, care practic coincide cu valoarea exactă $1!=1$.

Exemplul 2.3.4. Calculăm asimptotica integralei

$$J(\gamma)=\int_0^\infty e^{-\gamma x-1/x}dx \quad \text{pentru} \quad \gamma>>1. \tag{2.3.53}$$

Pentru a reduce (2.3.53) la forma standardă (2.3.1) întroducem schimbul de variabile $x=\gamma^\alpha\tau$, unde exponentul α este nedeterminat. Ţinînd cont că $S(\gamma,x(\tau))\equiv$ $\equiv-(\gamma x+1/x)=-\left(\gamma^{1+\alpha}\tau+\gamma^{-\alpha}/\tau\right)$, convenim, că condiţia $\gamma^{1+\alpha}=\gamma^{-\alpha}$ este satisfăcută, de unde obţinem valoarea $\alpha=-1/2$. În rezultat $S(\gamma,x(\tau))=-\sqrt{\gamma}\left(\tau+1/\tau\right)$, iar expresia (2.3.53) capătă forma standardă a integralelor Laplace.

$$J(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{\gamma}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}d\tau. \tag{2.3.54}$$

Analiza asimptotică a integralei (2.3.54) poate fi efectuată utilizînd procedeele standarde descrise mai sus. În cazul dat $f(\tau)\equiv 1$, $S(\tau)\equiv-(\tau+1/\tau)$. Funcţia $S(\tau)$ capătă valoarea maximală în punctul $\tau=1$. În aceaste condiţii în punctul $\tau=1$, $S_{\max}=S(1)=-2$, $S'(1)=0$, $S''(1)=-2$, $S'''(1)=6$, $S^{(4)}(1)=-24$.

Descompunerea asimptotică $F(\gamma)$ este dată de formula (2.3.43), în care este necesar numai de efectuat schimbul $\gamma \to \sqrt{\gamma}$. În conformitate cu (2.3.42) $c_2 = 3\alpha_3$, iar calcularea lui α_3 cu ajutorul formulei (2.3.34) ne conduce la reprezentarea asimptotică $F(\gamma)$ din (2.3.54) pentru $\gamma >> 1$

$$J(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\gamma}(\tau + 1/\tau)} d\tau \approx \sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt[4]{\gamma^3}} \left(1 - \frac{1}{3\sqrt{\gamma}} + \cdots\right), \quad \gamma >> 1. \tag{2.3.55}$$

Exemplul 2.3.5. Determinăm comportarea asimptotică a integralei

$$J(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^2} \ln(1 + x + x^2) dx \text{ pentru } \gamma >> 1. \tag{2.3.56}$$

Integrala (2.3.56) aparţine clasei de integrale Laplace şi pentru analiza ei putem aplica rezultatele obţinute mai sus. Dar pentru obţinerea descompunerii asimptotice (2.3.56) în exemplul dat folosim un procedeu special, care poate fi aplicat şi la analiza asimptotică a integralelor ce aparţin altor clase.

În acest procedeu vom considera integrala (2.3.56) drept definiţie a funcţiei $J(\gamma)$, iar problema determinării asimptoticii $J(\gamma)$, ca o problemă de evidenţiere a comportării funcţiei $J(\gamma)$ în vecinătatea punctului de la infinit.

În acest scop în (2.3.56) trecem la variabila nouă $x \to \sqrt{\gamma}\, \tau$ şi parametrul nou $\varepsilon = 1/\sqrt{\gamma}$. Cu aceste notaţii integrala (2.3.56) capătă forma:

$$J\left(\gamma = \frac{1}{\varepsilon^2}\right) = \varepsilon J(\varepsilon), \quad J(\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \ln(1 + \varepsilon\tau + \tau^2) d\tau. \tag{2.3.57}$$

Studierea comportării funcţiei $J(\gamma)$ în domeniul $\gamma >> 1$ sa redus, după cum urmează din (2.3.57), la analiza comportării funcţiei $J(\varepsilon)$ pentru $0 < \varepsilon << 1$. Remarcăm că funcţia $J(\varepsilon)$ este analitică în vecinătatea punctului $\varepsilon = 0$. Într-adevăr, integrala $J(\varepsilon)$ şi toate derivatele ei după ε sunt reprezentate prin integrale dependente uniform de parametrul ε. În rezultat funcţia $J(\varepsilon)$ poate fi reprezentată printr-o serie de puteri întregi şi pozitive ale parametrului ε.

Calculele nemijlocite dau: $J(0) = 0$, $J'(0) = 0$, $J''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \tau^2 d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \cdots$

şi deci $\quad J(\varepsilon) = J(0) + J'(0)\varepsilon + \frac{J''(0)}{2}\varepsilon^2 + \cdots = \frac{J''(0)}{2}\varepsilon^2 + \cdots \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4}\varepsilon^2, \quad \varepsilon << 1,$

iar

$$J(\gamma) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\gamma^{3/2}}, \quad \gamma >> 1. \tag{2.3.58}$$

Pentru analiza dependenţei (2.3.56) de parametrul γ aplicăm în continuare metodele de studiere a integralelor Laplace, menţionînd, că integrala (2.3.56) aparţine clasei (2.3.22). Pentru funcţiile analitice $f(x)$ dependenţa $J(\gamma)$ se calculează în forma explicită şi este dată de expresia (2.3.25), valabilă pentru toţi $\gamma > 0$. Pentru valorile asimptotice ale parametrului $\gamma >> 1$ în reprezentarea (2.3.25) se poate de limitat cu primii cîţiva termeni.

În cazul dat $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$, $f''(0) = 1, \cdots$ şi ţinînd cont de (2.3.25) putem scri termenul principal al asimptoticei funcţiei $F(\gamma)$ pentru $\gamma >> 1$. Acest termen coincide cu expresia (2.3.58) dat fiind că descompunerea asimptotică este univocă.

Exerciţii

Să se obţină expresiile asimptotice

2.3.1. $$\int_0^1 (1+x^4)^{-\lambda} dx \approx \lambda^{-\frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right), \qquad \lambda \to \infty;$$

2.3.2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2 x^2 + x}}{1+\lambda^2(x^2+x^4)} dx \approx \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau^2}}{1+\tau^2} d\tau, \quad \lambda \to \infty;$$

2.3.3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-e^x + \lambda x\} x^{2m} dx \approx \sqrt{2\pi} (\ln \lambda)^{2m} \lambda^{\lambda - \frac{1}{2}} e^{-\lambda}, \quad \lambda \to \infty, \quad m > 0;$$

2.3.4. $$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^p}{p} + \lambda x\right\} dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{p-1}}\, \lambda^{\frac{2-p}{2p-2}} e^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\lambda^{p/(p-1)}}, \quad \lambda \to \infty, \quad p > 1;$$

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} \exp\left\{-\frac{x^p}{p} + \lambda x\right\} dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{p-1}}\, \lambda^{\frac{2m-p}{2p-2}} e^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\lambda^{p/(p-1)}}, \quad \lambda \to \infty, \ m > 0, \ p > 1 .$$