2.4. Metoda fazei staţionare

Studierea unei clase vaste de probleme fizice, legate de răspândirea şi difracţia undelor de diferită natură, se reduce la analiza dependenţei de parametri al integralelor de tipul

$$F(\gamma) = \int_a^b f(\tau)e^{i\gamma S(\tau)}d\tau, \tag{2.4.1}$$

unde a, b, γ sunt numere reale, $f(\tau)$ şi $S(\tau)$ sunt funcţii reale, definite în intervalul $[a,b]$. Limitele de integrare a şi b pot primi şi valori infinite. Integralele de tipul (2.4.1) mai sunt numite şi integralele Fourier prin analogie cu integralele Laplace (2.3.1). Funcţia $S(\tau)$ în integralele Fourier este numită *fază*.

Prezenţa unităţii imaginare în argumentul exponentei din (2.4.1) conduce la faptul, că pentru valori mari ale parametrului funcţia de sub semnul integralei Fourier este o funcţie rapid oscilatoare în intervalul $[a,b]$. Aceasta face aproape imposibilă integrarea numerică directă a integralelor (2.4.1) pentru $\gamma >> 1$. Dar, după cum vom arăta în continuare, pentru valorile mari ale parametrului γ poate fi construită reprezentarea asimptotică a integralelor Fourier, care le aproximează cu un grad foarte mare de exactitate. Prin analogie cu cazul integralelor Laplace vom grupa funcţiile $S(\tau)$ în două clase în dependenţă de comportarea derivatei $S'(\tau)$ în intervalul $[a,b]$.

În prima clasă vom include funcţiile care variază monoton în intervalul $[a,b]$, adică

$$S'(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [a,b]. \tag{2.4.2}$$

În a doua clasă de funcţii vom include funcţiile care posedă un punct staţionar τ_0 în intervalul $[a,b]$.

$$S'(\tau_0) = 0, \quad S''(\tau_0) \neq 0, \quad a \leq \tau_0 \leq b. \tag{2.4.3}$$

Dacă în intervalul $[a,b]$ derivata $S'(\tau)$ se transformă în zero în cîteva puncte, atunci intervalul trebuie descompus în cîteva intervale , în fiecare din ele fiind satisfăcută condiţia (2.4.3) o singură dată.

Menţionăm, că spre deosebire de metoda Laplace, în care se ţinea cont numai de punctele extremale ale funcţiei $S(\tau)$ (de tip maximum) (vezi (2.3.3)), în cazul integralelor Fourier pentru funcţiile oscilatoare, faza $S(\tau)$ în punctele τ_0 poate atinge atît valoarea maximală, cît şi cea minimală.

În continuare vom efectua analiza asimptotică a integralelor Fourier (2.4.1) în cazul $\gamma >> 1$ pentru fiecare clasă întrodusă de funcţii $S(\tau)$.

Asimptotica integralelor Fourier. $\boldsymbol{S'(\tau) \neq 0}, \quad \boldsymbol{\tau \in [a,b]}$

Vom începe analiza asimptotică a integralelor Fourier pentru funcţiile $S(\tau)$ din clasa corespunzătoare (monotone) cu integralele de tipul

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \tag{2.4.4}$$

unde ω este o mărime reală. Acest tip de integrale îşi găseşte o aplicare foarte vastă în problemele fizice. În acest caz $a = -\infty$, $b = \infty$, $S(\tau) \equiv \tau$, iar integrala (2.4.4) reprezintă *tranformata Fourier* a funcţiei $f(\tau)$. Parametrul γ are sens de frecvenţă şi deaceea în (2.4.4), şi în continuare, acest parametru va fi înlocuit prin notaţia răspîndită ω.

Pentru a determina comportarea asimptotică a funcţiei $F(\omega)$ pentru $\omega >> 1$ integrăm (2.4.4) prin părţi

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{i\omega} f(\tau) e^{i\omega\tau} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Dat fiind că pentru existenţa integralei (2.4.4) este necesar ca funcţia de sub semnul integralei să se transforme în zero cînd $\tau = \pm\infty$, obţinem identitatea:

$$F(\omega) = -\frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{2.4.5}$$

valabilă pentru orice valori $\omega \neq 0$. Dar după cum urmează din (2.4.5) pentru $\omega >> 1$ avem $|F(\omega)| << 1$, convenind că integrala din partea dreaptă a formulei (2.4.5) există.

Dacă pentru funcţia $f(\tau)$ de sub semnul integralei există derivatele de ordin superior $f^{(k)}(\tau)$, $(k = 2, 3, \cdots)$ şi integralele $\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$, atunci aplicînd de n ori formula integrării prin părţi în formula (2.4.4) obţinem identitatea:

$$F(\omega) = \left(-\frac{1}{i\omega}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad \omega \neq 0 \tag{2.4.6}$$

şi în consecinţă *transformata Fourier* $F(\omega)$ descreşte mai repede decât funcţia $1/\omega^n$.

În cazul cînd funcţia $f(\tau)$ de sub semnul integralei posedă derivatele de toate ordinele $n = 1, 2, 3, \cdots$ pentru $\omega >> 1$ şi există valorile finite ale integralelor din (2.4.6), în conformitate cu (2.4.6) *transformata Fourier* $F(\omega)$ descreşte mai repede decît orice putere a mărimii $1/\omega$.

O metodă generală de obţinere a dependenţelor asimptotice concrete pentru $F(\omega)$ constă în aplicarea metodelor teoriei funcţiilor de variabilă complexă la calcularea integralei Fourier (2.4.4) şi , în caz de necesitate, efectuarea în continuare a analizei asimptotice a expresiilor obţinute pentru $F(\omega)$. Pentru aceasta se întroduce variabila complexă $z=\tau+it$ şi se efectuează o prelungire analitică a funcţiei $f(\tau)$ din (II.4.4) de sub semnul integralei în semiplanul de sus $t>0$ al planului complex z. În conformitate cu teorema lui Cauchy

$$\int_C f(z)e^{i\omega z}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left(f(z_k)e^{i\omega z_k}\right) \tag{2.4.7}$$

unde $z_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ – sunt puncte singulare izolate ale funcţiei analitice $f(z)$, $res\ f(z_k)=\lim\limits_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)$ este reziduul funcţiei $f(z)$ în punctele z_k, C este conturul de integrare ales în modul corespunzător.

Forma conturului de integrare C este determinată de proprietăţile funcţiei $f(z)$. El trebuie ales în aşa mod, ca în domeniul D, mărginit de conturul C funcţia $f(z)$ să fie analitică şi monofilă.

Vom studia o serie de exemple concrete de aplicare a teoremei Cauchy (2.4.7) pentru obţinerea estimărilor asimptotice ale integralelor Fourier (2.4.4) în cazul $\omega>>1$.

Exemplul 2.4.1. Să se calculeze integrala

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{1+\tau^2}d\tau,\quad \omega>0. \tag{2.4.8}$$

Mai întîi menţionăm, integrarea prin părţi de n ori a expresiei (2.4.7) ne conduce la dependenţa (2.4.6) şi dat fiind că funcţia de sub semnul integralei are derivate de toate ordinele, care se transformă în zero în infinit, funcţia $F(\omega)$ pentru $\omega>>1$ descreşte mai rapid decît orice putere. a $\frac{1}{\omega}$. Întroducem variabila complexă $z=\tau+it$ şi funcţiile de variabilă complexă $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$, $e^{i\omega z}$, care coincid pentru $t=0$ cu funcţiile $f(\tau)=\frac{1}{1+\tau^2}$. Funcţia $f(z)$ este analitică în planul z. În punctele $z=\pm i$ ea posedă poluri simple de ordinul unu.

Dat fiind, că funcţia $e^{i\omega\tau}$ în semiplanul de sus ($t>0$) descreşte exponenţial, putem alege conturul închis C cum este arătat în Fig.2.4.

Cercetăm integrala de la funcţia $f(z)e^{i\omega z}$ pe acest contur. Funcţia de sub semnul integralei în domeniul D, mărginit de conturul C posedă un pol simplu în punctul $z=i$ şi în conformitate cu teorema lui Cauchy (2.4.7) obţinem

$$\oint_C \frac{e^{i\omega z}}{1+z^2}dz = 2\pi i\frac{e^{-\omega}}{2i} = \pi e^{-\omega} \quad , \tag{2.4.9}$$

unde $C = C_0 + C_R$. Trecînd la limită, cînd $R \to \infty$ şi ţinînd cont că integrala pe conturul C_R se transformă în zero cînd $R \to \infty$ (lema lui Jordan) obţinem definitiv

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{1+\tau^2}d\tau = \pi e^{-\omega} \quad , \tag{2.4.10}$$

care se aflǎ într-o concordanţă deplină cu afirmaţiile despre caracterul de descreştere al funcţiei $F(\omega)$ pentru $\omega >> 1$.

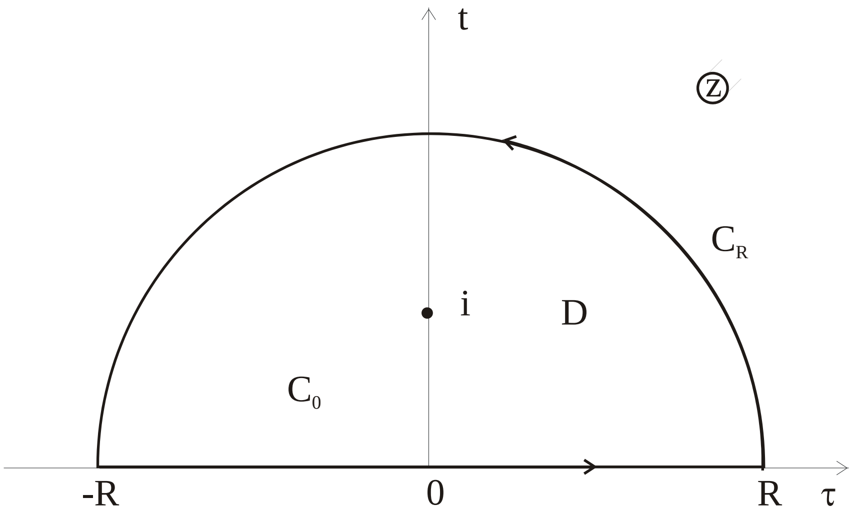

Fig.2.4

Exemplul 2.4.2. Să se obţină reprezentarea asimptotică pentru integrala Fourie

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{1+\tau^2}}d\tau \tag{2.4.11}$$

pentru $\omega >> 1$.

Întroducem planul complex $z = \tau + it$ şi funcţiile de variabilă complexă $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ şi $e^{i\omega z}$. Funcţia $e^{i\omega\tau}$ este regulară în planul z cu excepţia punctului infinit, iar funcţia $f(z)$ are un punct de ramificare $z_{1,2} = \pm i$. Pentru a aplica teorema lui Cauchy la calcularea integralei (2.4.11) întroducem conturul închis C reprezentat în Fig. 2.4.2.

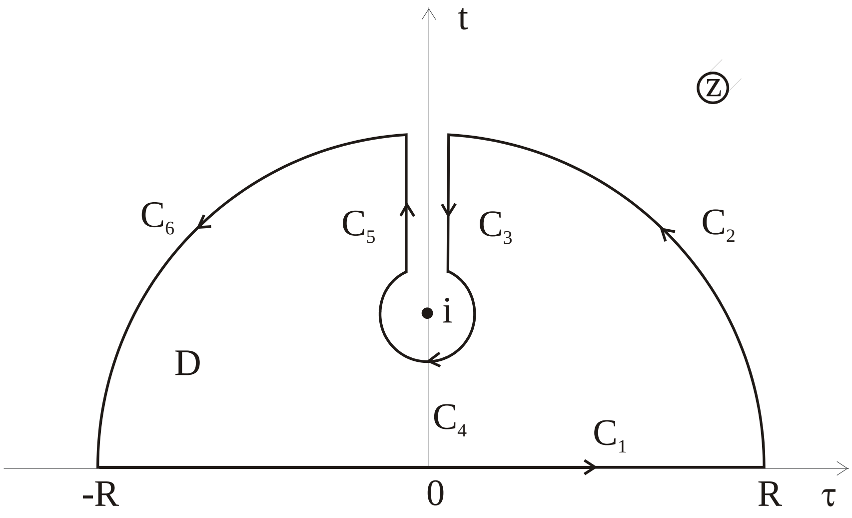

Fig. 2.4.2

În domeniul D, mărginit de conturul C, funcţia de sub semnul integralei (2.4.11) este deacuma regulară şi conform teoremei lui Cauchy (2.4.7) putem scrie

$$\oint_C \frac{e^{i\omega z}}{\sqrt{1+z^2}}\, dz = 0, \tag{2.4.12}$$

unde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6$, astfel că $\oint_C = \sum_{i=1}^{6} \int_{C_i}$.

La limită, cînd $R \to \infty$, integrala pe C_1 a conturului C coincide cu integrala iniţială (2.4.11), integralele pe C_2 şi C_6 se transformă în zero în baza lemei lui Jordan, integrala pe circumferinţa C_4 se transformă în zero cînd raza acestei circumferinţe tinde spre zero, şi, deci, condiţia (2.4.12) capătă forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{1+\tau^2}}\, d\tau = -\int_{i\infty}^{i} \frac{e^{i\omega z}\, dz}{\sqrt{1+z^2}} - \int_{i}^{i\infty} \frac{e^{i\omega z}\, dz}{\sqrt{1+z^2}} \,. \tag{2.4.13}$$

În prima integrală din partea dreaptă schimbăm cu locurile limitele de integrare şi ţinem cont de legătura dintre valorile funcţiei $\sqrt{1+z^2}$ pe porţiunile C_5 şi C_3 ale conturului, ca margini ale tăieturii planului z după raza $(i, i\infty)$

$$\left.\sqrt{1+z^2}\right|_{C_3} = -\left.\sqrt{1+z^2}\right|_{C_5} \,. \tag{2.4.14}$$

Ţinînd cont de relaţia (2.4.14), integrala Fourie capătă forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{1+\tau^2}} d\tau = -2\int_{i}^{i\infty} \frac{e^{i\omega z} dz}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad (2.4.15)$$

în care valoarea funcţiei $\sqrt{1+z^2}$ se ia pe marginea tăieturii C_5. Pe conturul C_5 $z = it$, $1+z^2 = 1-t^2 < 0$, $e^{i\omega z} = e^{-\omega t}$, $dz = idt$.

Determinînd valoarea funcţiei $\sqrt{1+z^2}$ pe malul tăieturii C_5 vom menţiona, că pentru valorile pozitive a expresiei de sub semnul rădăcinei $1+z^2$ se ia valoarea aritmetică a rădăcinei (adică pozitivă).

Expresia $1+z^2$ capătă valoare reală şi pozitivă pe axa reală ($t=0$) şi pe sectorul $0<t<1$ a axei imaginare. Notăm prin ε raza circumferinţei C_4. Parcursul acestei circumferinţa din punctul $z = i(1-\varepsilon)$ al axei imaginare, în care expresia $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}$ este pozitivă, şi prin urmare argumrntul acestei funcţii este egal cu zero, în punctul $z = i(1+\varepsilon)$, care aparţine marginei C_5 a tăieturii se efectuează după direcţia mişcării acelor ciasornicului. În rezultatul acestui mod de parcurgere argumentul funcţiei $\sqrt{1+z^2}$ se micşorează cu $\frac{\pi}{2}$ şi avem

$$\sqrt{1+z^2}\Big|_{C_5} = -i\sqrt{t^2-1}. \qquad (2.4.16)$$

Ţinînd cont de (2.4.15) şi (2.4.16) obţinem definitiv pentru integrala Fourie următoarea valoare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{1+\tau^2}} d\tau = 2\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\omega t} dt}{\sqrt{t^2-1}}, \qquad (2.4.17)$$

valabilă pentru toate valorile $\omega > 0$.

Menţionăm, că funcţia de sub semnul integralei din partea dreaptă este o funcţie monoton descrescătoare, ce simplifică esenţial algoritmul calculului nemijlocit al integralelor.

Integrala din partea dreaptă a expresiei (2.4.17) aparţine clasei integralelor Laplace şi poate fi adusă la forma asimptotică (pentru $\omega >> 1$) aplicînd metodele desfăşurate în paragraful precedent.

Cu scopul de a obţine dependenţa explicită de parametrul ω, pentru $\omega >> 1$, transformăm integrala Laplace cu ajutorul substituţiei $t = 1+x^2$. Obţinem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{1+\tau^2}} d\tau = \sqrt{2}\, e^{-\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega x^2} dx}{\sqrt{1+x^2/2}}. \qquad (2.4.18)$$

Pentru $\omega >> 1$, comportarea asimptotică a integralei Laplace este definită de expresia generală (2.3.43) pentru clasa de funcţii $f(x)$ (2.3.3). În cazul (2.4.18) ,

$f(0)=1$, $c_1=0$, $c_2=-1/4,\cdots$. Ţinînd cont de (2.3.43) obţinem comportarea asimptotică căutată a integralei Fourier (2.4.11)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{1+\tau^2}}d\tau=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega}}{\sqrt{\omega}}\left(1-\frac{1}{8\omega}+\cdots\right),\quad \omega>>1. \tag{2.4.19}$$

La analiza integralelor de tipul (2.4.4) conduce şi problema studierii integralelor Fourier de tipul

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega S(\tau)}d\tau, \tag{2.4.20}$$

în care faza $S(\tau)$ este o funcţie monotonă pe toată axa numerică, adică $S'(\tau)\neq 0$, $\tau\in(-\infty,\infty)$ aşa încît $S(\pm\infty)=\pm\infty$ (sau $\mp\infty$).

În acest caz se efectuează un schimb de variabile $S(\tau)=S(0)+S'(0)x$ şi (2.4.20) capătă forma standardă a integralei Fourier de tipul (2.4.4)

Vom analiza, în continuare, metodele de calcul a integralelor Fourier, definite în intervalul finit $[a,b]$ şi cu varierea monotonă a fazei $S(\tau)$:

$$F(\gamma)=\int_a^b f(\tau)e^{i\gamma S(\tau)}d\tau,\quad S'(\tau)\neq 0,\quad \tau\in[a,b]. \tag{2.4.21}$$

Procedeul general de analiză a integralelor de tipul (2.4.21) este aplicarea multiplă a formulei de integrare prin părţi la calcularea integralei date. Aplicînd o singură dată această formulă, obţinem:

$$F(\gamma)=\frac{1}{i\gamma}\left.\frac{f(\tau)e^{i\gamma S(\tau)}}{S'(\tau)}\right|_a^b-\frac{1}{i\gamma}\int_a^b\left(\frac{f(\tau)}{S'(\tau)}\right)'e^{i\gamma S(\tau)}d\tau, \tag{2.4.22}$$

şi, prin urmare, comportarea asimptotică a funcţiei $F(\gamma)$ pentru valori ale parametrului ($\gamma>>1$) este determinată de termenul liber în (2.4.22) cu condiţia că $f(\tau)\neq 0$ cel puţin la unul din capetele segmentului [a,b]. Termenul liber (2.4.22) reprezintă termenul principal al reprezentării $F(\gamma)$ pentru $\gamma>>1$. Termeni următori în descompunerea asimptotică afuncţiei $F(\gamma)$ pot fi obţinuţi apelînd încă o dată formula de integrare prin părţi ca calcularea integralei din partea dreaptă a expresiei (2.4.22)

Vom menţiona, că spre deosebire de cazul examinat mai sus cu limitele infinite de integrare, în cazul dat descreşterea integralelor Fourier (pentru $\gamma>>1$) este după legea puterilor, iar comportarea asimptotică a integralei $F(\gamma)$ (2.4.21) este determinată numai de valorile funcţiilor $f(\tau)$ şi $S(\tau)$ şi derivatele lor la capetele intervalului de integrare şi nu depind de particularităţile comportării acestor funcţii pe tot intervalul $[a,b]$.

În continuare vom analiza integrala Fourier (2.4.1) cu funcţia $S(\tau)$ care aparţine clasei (2.4.3).

Asimptotica integralelor Fourier. $\boldsymbol{S'(\tau_*)=0}$, $\boldsymbol{\tau_*\in[a,b]}$.

Se poate de presupus că prezenţa unui punct staţionar $\tau=\tau_*$ al funcţiei $S(\tau)$ poate influenţa esenţial comportarea asimptotică a funcţiei $F(\gamma)$ (II.4.1) pentru $\gamma>>1$. Aceasta este legată de faptul, că în vecinătatea punctului $\tau=\tau_*$ oscilaţiile factorului exponenţial în expresia de sub semnul integralei (2.4.1) sunt cu mult întîrziate comparativ cu oscilările în vecinătatea valorilor $\tau\in[a,b]$, pentru care $S'(\tau)\neq 0$. Într-adevăr să notăm prin $\delta\tau$ varierea valorii argumentului τ definită de condiţia $\gamma\delta\tau\sim 1$, de unde $\delta\tau\sim 1/\gamma$. Această mărime $\delta\tau$ are sens de lungime a porţiunii de interval în care se efectuează o oscilaţie a factorului exponenţial în vecinătatea punctului ordinar τ ($S'(\tau)\neq 0$). În vecinătatea punctului staţionar $\tau=\tau_*$ o oscilaţie este efectuată pe porţiunile $\delta\tau$, determinate de condiţia $\gamma(\delta\tau)^2\sim 1$. Prin urmare, în vecinătatea punctului staţionar, oscilaţiile funcţiei de sub semnul integralei pentru valori mici ale parametrului γ sunt mai întîrziate decât oscilaţiile în vecinătatea punctelor ordinare. Aşa dar, se poate aştepta că aportul principal în valoarea integralei $F(\gamma)$ pentru valori asimptotice mari ale parametrului γ va fi al vecinătăţii punctului staţionar.

Vom menţiona, că în prezenţa punctelor staţionare ale funcţiei $S(\tau)$ pot apărea diferite situaţii. Spre exemplu, punctul staţionar poate fi unic şi se află în interiorul intervalului de integrare Vom numi acest caz drept caz fundamental. Punctul staţionar poate fi unic şi să coincidă cu unul din capetele intervalului $[a,b]$. Puncte staţionare pot exista cîteva şi ele pot fi separate, dar pot fi şi apropiate unul de altul. În sfîrşit, puncte staţionare pote fi de ordin mai superior ($S'(\tau_*)=0$, $S''(\tau_*)=0,\cdots$, $S^{2k+1}(\tau_*)=0$). Fiecare din cazurile enumărate mai sus cere un studiu separat. În continuare, noi ne vom limita cu analiza detaliată a cazului general, cînd faza $S(\tau)$ posedă un punct izolat τ de ordinul unu, pentru care

$$S'(\tau_*)=0,\quad S''(\tau_*)\neq 0,\quad a<\tau_*<b \tag{2.4.23}$$

În acest scop vom calcula integrala etalon:

$$F(\gamma)=\int_{-a}^{a} e^{i\gamma\tau^2}\,d\tau. \tag{2.4.24}$$

În (2.4.24) faza $S(\tau)=\tau^2$ posedă un punct staţionar unic $\tau_*=0$ în intervalul $[-a,a]$, astfel că $S''(0)=-2\neq 0$.

Prelungim funcţia de sub semnul integralei (2.4.24) în planul complex $z = \tau + it$ şi vom studia integrala:

$$F(\gamma) = 2\int_0^a e^{i\gamma z^2}\,dz. \qquad (2.4.25)$$

Întroducem conturul $C = C_1 + C_2 + C_3$, unde porţiunea conturului C_1 parcurge axa reală τ din originea de coordonate până la valoarea $\tau = a > 0$, porţiunea C_2 reprezintă un arc de circumferinţă de raza a, aşa încît $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, iar porţiunea C_3 parcurge raza $0 \le r \le a$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (vezi Fig. 2.4.3).

Funcţia de sub semnul integralei e^{iz^2} este regulară în domeniul D, mărginit de conturul C, şi, conform teoremei lui Cauchy , integrala pe conturul C de la această funcţie este egală cu zero şi, în consecinţă:

$$\int_0^a e^{i\gamma\tau^2}\,dz = -\int_{C_2} e^{i\gamma z^2}\,dz - \int_{C_3} e^{i\gamma z^2}\,dz. \qquad (2.4.26)$$

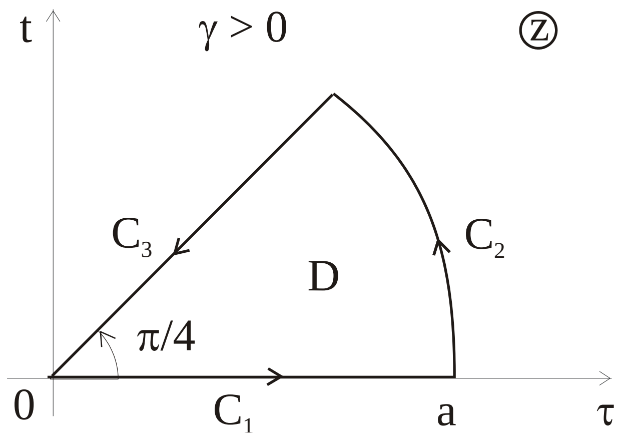

Fig. 2.4.3

Pentru comoditatea calculelor integralelor pe contururile C_2 şi C_3 vom trece la reprezentarea numerelor complexe $z = re^{i\varphi}$ sub formă de funcţii trigonometrice. Avem

$$\int_{C_2} e^{i\gamma z^2}\,dz = a\int_0^{\pi/4} e^{i(\tilde{\gamma}\cos 2\varphi + \varphi)} e^{-\tilde{\gamma}\sin 2\varphi}\,d\varphi, \quad \tilde{\gamma} = \gamma a^2.$$

Pentru valorile $\tilde{\gamma} >> 1$ valoarea acestei integrale tinde spre zero, dat fiind,că

$$\left|\int_{C_2} e^{i\gamma z^2} dz.\right| \le a \int_0^{\pi/4} \left| e^{i(\tilde{\gamma}\cos 2\varphi+\varphi)} \right| e^{-\tilde{\gamma}\sin 2\varphi} d\varphi = a \int_0^{\pi/4} e^{-\tilde{\gamma}\sin 2\varphi} d\varphi$$

şi în conformitate cu metoda Laplace

$$\int_0^{\pi/4} e^{-\tilde{\gamma}\sin 2\varphi} d\varphi \approx 1/2\tilde{\gamma}, \qquad \tilde{\gamma} >> 1.$$

Prin urmare, pentru valori asimptotice mari ale parametrului $\tilde{\gamma} >> 1$, care corespund: sau valorilor mari ale parametrului a şi valori moderate ale parametrului γ; sau valorilor mari ale parametrului γ şi valori moderate ale parametrului a, estimarea modulului integralei pe conturul C_2 are forma:

$$\left|\int_{C_2} e^{i\gamma z^2} dz.\right| \le \frac{1}{2\gamma a}, \quad \gamma a^2 >> 1. \tag{2.4.27}$$

Vom calcula, în continuare, integrala pe conturul C_3 . Consecutiv obţinem:

$$\int_{C_3} e^{i\gamma z^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_a^0 e^{i\gamma r^2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})} dr = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^a e^{-\gamma r^2} dr = -\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} - \int_a^\infty e^{-\gamma r^2} dr \right).$$

Dat fiind că $\int_a^\infty e^{-\gamma r^2} dr \approx \frac{1}{2\gamma a} e^{-\gamma a^2}$, obţinem pentru $\gamma a^2 >> 1$

$$\int_{C_3} e^{i\gamma z^2} dz \approx -\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}, \quad \gamma >> 1 \tag{2.4.28}$$

şi, în consecinţă, comportarea asimptotică a integralei Fourier are forma

$$F(\gamma) = \int_{-a}^{a} e^{i\gamma\tau^2} d\tau. \approx \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \gamma >> 1 . \tag{2.4.29}$$

Luînd conjugatul expresiei (2.4.29) putem obţine reprezentarea asimptotică a integralelor Fourier, care conţin semnul minus în exponentă:

$$\int_{-a}^{a} e^{-i\gamma\tau^2} d\tau. \approx \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad \gamma >> 1. \tag{2.4.30}$$

Dependenţa (2.4.30) poate fi obţinută nemijlocit din (2.4.29) dacă admitem, că parametrul γ primeşte valori negative. În acest caz $\gamma = -|\gamma|$ şi dat fiind că

$\frac{1}{\sqrt{-1}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ obţinem rezultatul (2.4.30). Ea mai poate fi obţinută nemijlocit prin metoda descrisă mai sus, dar utilizând conturul din Fig. 2.4.4.

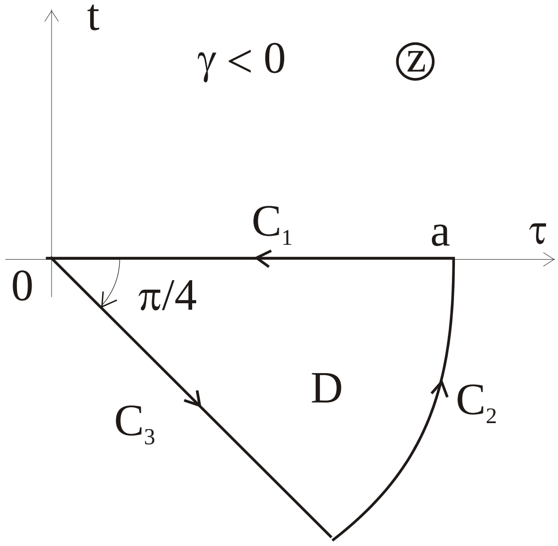

Fig. 2.4.4

Aşa dar, în continuare, pentru obţinerea estimărilor asimptotice ale integralelor Fourier cu valorile negative ale exponentei putem utiliza expresia (2.4.29) admiţînd că parametrul γ capătă şi valori negative.

Menţionăm, că pentru valorile parametrului $a = \infty$ reprezentarea (2.4.29) este exactă pentru orice valori pozitive a parametrului γ. Pentru $a \neq \infty$ partea dreaptă a expresiei (2.4.29) reprezintă termenul principal în descompunerea asimptotică a integralei Fourier pentru $\gamma >> 1$ şi această mărime nu depinde de valoarea lui a. Aşa dar, pentru a obţine termenul principal al descompunerii asimptotice, putem conveni că limitele de integrare în integrala Fourier sunt infinite.

În continuare vom analiza asimptotica integralelor Fourier (2.4.1) în cazul cînd în intervalul $[a,b]$ există un punct staţionar unic $\tau = \tau_*$ în care faza $S(\tau)$ satisface condiţiile (2.4.23).

Întroducem schimbul de variabile

$$S(\tau) \equiv S(\tau_*) + \frac{S''(\tau_*)}{2} u^2, \qquad (2.4.31)$$

prin care funcţia $S(\tau)$ capătă forma cea mai simplă şi care satisface condiţiile (2.4.23). În rezultatul schimbului (2.4.31) valorii $\tau = \tau_*$ îi corespunde valoarea $u = 0$.

Limitele de integrare pentru variabila u devin $\alpha = -\sqrt{\frac{(S(a)-S(\tau_*))}{S''(\tau_*)}} < 0$ pentru limita de jos şi $\beta = \sqrt{\frac{(S(b)-S(\tau_*))}{S''(\tau_*)}} > 0$ pentru limita de sus.

Dat fiind că $S'(\tau)d\tau = S''(\tau_*)udu$, pentru integrala Fourier obţinem:

$$F(\gamma) = e^{i\gamma S(\tau_*)} S''(\tau_*) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\tau) e^{i\gamma \frac{S''(\tau_*)}{2} u^2} udu}{S'(\tau)} . \tag{2.4.32}$$

Sub semnul integralei variabila τ reprezintă funcţia $\tau = \tau(u)$ determinată din (2.4.31).

Procedeele de obţinere a dependenţei explicite $\tau = \tau(u)$ au fost detaliat descrise în paragraful precedent pentru calculul expresiilor asimptotice ale integralelor Laplace [vezi (2.3.32), (2.3.33)]. În conformitate cu aceste rezonamente putem scri:

$$\tau(u) = \tau_* + u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \cdots, \quad \alpha_2 = -\frac{S'''(\tau_*)}{6S''(\tau_*)}, \ \alpha_3 = \frac{5}{72}\left(\frac{S'''(\tau_*)}{S''(\tau_*)}\right)^2 - \frac{S^{(4)}(\tau_*)}{24S''(\tau_*)} . \tag{2.4.33}$$

Admitem, că funcţia $f(\tau)$ din (2.4.31) poate fi descompusă în seria de puteri: $f(\tau) = f(\tau_*) + f'(\tau_*)(\tau-\tau_*) + \frac{f''(\tau_*)}{2}(\tau-\tau_*)^2 + \cdots$. Ţinînd cont de (2.4.33), putem scri integrala Fourier (2.4.32) sub forma:

$$F(\gamma) = e^{i\gamma S(\tau_*)} \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\gamma \frac{S''(\tau_*)}{2} u^2} \left(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \cdots\right) du , \tag{2.4.34}$$

unde $\beta_0 = f(\tau_*)$, $\beta_1 = f'(\tau_*) - \frac{S'''(\tau_*) f(\tau_*)}{S''(\tau_*}$, $\beta_2 = \cdots$.

Păstrînd în expresia de sub semnul integralei (2.4.34) în paranteze numai coeficienţii β_0 şi ţinînd cont de reprezentarea asimptotică (2.4.29) pentru integrala etalon Fourier obţinem pentru termenul principal al integralei Fourier (2.4.1) cu un punct staţionar unic $\tau = \tau_*$ expresia:

$$F(\gamma) \approx e^{i\gamma S(\tau_*) + i\frac{\pi}{4}} f(\tau_*) \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma S''(\tau_*)}}, \quad \gamma >> 1 \tag{2.4.35}$$

(în expresia (2.4.35) se ţine cont de semnul expresiei $S''(\tau_*)$).

În cazurile cînd funcţia de sub semnul integralei $f(\tau)$ în punctul staţionar se transformă în zero ($f(\tau_*) = 0$) sau infinit ($f(\tau_*) = \infty$) procedeele descrise mai sus pentru obţinerea asimptoticei integralelor Fourier devin inaplicabile. Analiza acestor situaţii va fi efectuată în continuare, studiind cîteva exemple concrete.

Exemplul 2.4.1. Vom studia comportarea asimptotică a funcţiei lui Bessel $J_n(x)$ de indice întreg ($n-$ un număr întreg), pentru valorile argumentului $x>>1$. Reeşim din reprezentarea funcţiei lui Bessel $J_n(x)$ sub formă integrală [21]:

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)d\varphi\ . \tag{2.4.36}$$

Scriem această integrală sub forma comodă pentru aplicarea metodei fazei staţionare:

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\pi}e^{ix\sin\varphi-in\varphi}d\varphi\,. \tag{2.4.37}$$

În cazul dat $S(\varphi)=\sin\varphi$, $f(\varphi)=e^{-in\varphi}$, $\gamma=x$, şi prin urmare , funcţia de sub semnul integralei în (2.4.37) este o funcţie rapid oscilatoare pentru $x>>1$.

În intervalul $[0,\pi]$ faza $S(\varphi)$ posedă un singur punct staţionar $\varphi_*=\pi/2$, în care îşi atinge valoarea sa maximală. În acest punct $S(\varphi_*)=1$, $S''(\varphi_*)=-1$, $f(\varphi_*)=e^{-i\frac{n\pi}{2}}$ şi în conformitate cu formula (2.4.25) obţinem

$$J_n(x)\approx\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(e^{ix+i\frac{\pi}{4}-i\frac{n\pi}{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{-x}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad x>>1\,.$$

Dat fiind că în (2.4.32) limitele de integrare sunt finite, iar aportul punctelor de la capetele intervalului de integrare în valoarea integralei este de ordinul $\sim 1/\gamma$ pentru $\gamma>>1$ (vezi (2.4.22)), urmează că reprezentarea asimptotică a funcţiei $J_n(x)$ pentru $x>>1$ capătă forma:

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right),\quad x>>1\,. \tag{2.4.38}$$

Exemplul 2.4.2. Vom obţine formula asimptotică a integralei

$$F(\gamma)=\int_1^{\infty}\frac{e^{i\gamma\tau}d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \tag{2.4.39}$$

pentru $\gamma>>1$. Dat fiind că pentru $\tau=1$ funcţia de sub semnul integralei în (2.4.39) se transformă în infinit, utilizarea directă a rezultatelor obţinute mai sus pentru asimptotica integralelor lui Fourier este imposibilă. În acest caz efectuăm schimbul de variabile $\tau=1+u^2$ şi transformăm integrala (2.4.39):

$$F(\gamma)=\sqrt{2}e^{i\gamma}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\gamma u^2}du}{\sqrt{1+u^2/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\gamma u^2}du}{\sqrt{1+u^2/2}} \quad . \tag{2.4.40}$$

În cazul dat $S(u)=u^2$, $u_*=0$ este punctul staţionar, $S(0)=0$, $S''(0)=2$, $f(0)=1$ şi în conformitate cu (2.4.35) obţinem:

$$\int_1^{\infty}\frac{e^{i\gamma\tau}d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\approx\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\,e^{i\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \gamma>>1. \tag{2.4.41}$$

Exemplul 2.4.3. Vom studia comportarea asimptotică a integralei

$$F(\gamma)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\gamma\tau}{\sqrt{\tau}}\ln^2\tau d\tau \tag{2.4.42}$$

pentru $\gamma>>1$. Metoda cea mai simplă de obţinere a asimptoticei integralei (2.4.42) pote fi metoda artificială, care constă în schimbul de variabile $t=\gamma\tau$. Dat fiind, că $\ln\tau=\ln t-\ln\gamma$ şi $\ln^2\tau=\ln^2\gamma-2\ln\gamma\ln t+\ln^2 t$, obţinem:

$$F(\gamma)=\frac{\ln^2\gamma}{\sqrt{\gamma}}I_1-2\frac{\ln\gamma}{\sqrt{\gamma}}I_2+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}I_3, \tag{2.4.43}$$

unde $I_1=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$, $I_2=\int_0^{\infty}\frac{\ln t\sin t}{\sqrt{t}}dt$, $I_3=\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 t\sin t}{\sqrt{t}}dt$.

Integralele I_1, I_2 şi I_3 există şi sunt finite. Relaţia (2.4.43) este valabilă pentru toţi $\gamma>0$. Pentru $\gamma>>1$ păstrînd în (2.4.43) numai primul termen (termenul principal în descompunerea asimptotică) obţinem reprezentarea asimptotică a integralei (2.4.42) pentru valori mari ale parametrului γ :

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\gamma\tau}{\sqrt{\tau}}\ln^2\tau d\tau\approx\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}}\ln^2\gamma, \quad \gamma>>1. \tag{2.4.44}$$

Vom obţine asimptotica (2.4.44) la fel prin procedeul regular descris mai sus, aplicabil pentru analiza unei clase mai largi de integrale de tip Fourier. Pentru aceasta în (2.4.42) efectuăm schimbul de variabile $\tau\to\tau^2$ şi aducem această integrală la forma:

$$F(\gamma)=2\int_0^{\infty}\sin\gamma\tau^2\ln^2\tau^2 d\tau. \tag{2.4.45}$$

Întroducem planul complex $z=\tau+it$:

$$F(\gamma) = 2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{i\gamma z^2} \ln^2 z^2 dz. \qquad (2.4.46)$$

În planul complex z trasăm conturul $C = C_1 + C_2 + C_3$ (vezi Fig. 2.4.3) şi calculăm integrala pe acest contur de la funcţia de sub semnul integralei (2.4.46). În domeniul D, limitat de conturul C, funcţia dată este regulată şi conform teoremei lui Cauchy integrala de la această funcţie pe conturul C este egală cu zero. Dat fiind că pentru $a \to \infty$ integrala pe porţiunea C_2 se transformă în zero, putem scrie:

$$\int_{C_1} e^{i\gamma z^2} \ln^2 z^2 dz = -\int_{C_3} e^{i\gamma z^2} \ln^2 z^2 dz. \qquad (2.4.47)$$

Pe porţiunea C_1 avem $z = \tau$ şi $\int_{C_1} e^{i\gamma z^2} \ln^2 z^2 dz = \int_0^\infty e^{i\gamma\tau^2} \ln^2 \tau^2 d\tau$. Pe porţiunea C_3 avem $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$, $\ln z^2 = \ln r^2 + i\dfrac{\pi}{2}$, $\int_{C_3} e^{i\gamma z^2} \ln^2 z^2 dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_\infty^0 e^{-\gamma r^2} \left(\ln r^2 + i\dfrac{\pi}{2}\right)^2 dr$.

Integrala (2.4.47) capătă forma $\int_0^\infty e^{i\gamma\tau^2} \ln^2 \tau^2 d\tau = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-\gamma r^2} \left[\ln^2 r^2 - \dfrac{\pi^2}{4} + i\pi \ln r^2\right] dr$, iar

$$F(\gamma) = 2\,\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{i\gamma\tau^2} \ln^2 \tau^2 d\tau = \sqrt{2}\, I_1(\gamma) + \pi\sqrt{2}\, I_2(\gamma) - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} I_3(\gamma), \qquad (2.4.48)$$

unde $I_1(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma r^2} \ln^2 r^2 dr$, $I_2(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma r^2} \ln r^2 dr$, $I_3(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma r^2} dr$.

Întroducînd în integralele $I_1(\gamma)$, $I_2(\gamma)$ şi $I_3(\gamma)$ variabila nouă $\sqrt{\gamma}\, r = \tau$ obţinem forma explicită a dependenţei acestor integrale de parametrul γ. În rezultatul unor calcule nemijlocite obţinem:

$$I_1(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\ln^2 \gamma}{\sqrt{\gamma}} - 2C_1 \frac{\ln\gamma}{\sqrt{\gamma}} + \frac{C_2}{\sqrt{\gamma}}, \quad I_2(\gamma) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\ln\gamma}{\sqrt{\gamma}} + \frac{C_1}{\sqrt{\gamma}}, \quad I_3(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\gamma}},$$

unde $C_1 = \int_0^\infty e^{-\tau^2} \ln \tau^2 d\tau$, $C_2 = \int_0^\infty e^{-\tau^2} \ln^2 \tau^2 d\tau$.

Utilizînd aceste valori ale integralelor $I_i(\gamma)$ ($i = 1,2,3$) obţinem reprezentarea integralei Fourier (2.4.42) valabilă pentru toate valorile pozitive ale parametrului γ ($\gamma > 0$). Pentru valorile asimptotice ale parametrului $\gamma >> 1$, păstrînd numai termenul principal în reprezentarea asimptotică obţinem:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\gamma\tau}{\sqrt{\tau}} \ln^2 \tau d\tau \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \ln^2 \gamma, \quad \gamma >> 1, \qquad (2.4.49)$$

care coincide cu expresia (2.4.44)