

2.5. Metoda pantei maxime

În acest paragraf vom analiza detaliat procedeele de obținere a reprezentărilor asimptotice pentru integralele pe contur de tipul

$$J(\gamma) = \int_C f(z)e^{\gamma S(z)} dz, \quad (2.5.1)$$

în care γ este un parametru real și pozitiv, $f(z)$ și $S(z)$ sunt funcții cunoscute analitice în domeniul D . Conturul de integrare C se află în domeniul D și își are începutul și sfârșitul respectiv în punctele A și B . Conturul C este deschis și deci punctele A și B sunt diferite. Este posibil și cazul când punctele A și B coincid și atunci conturul C este un contur închis.

Menționăm că integralele de tipul (2.5.1) apar în mod obligatoriu la rezolvarea diferitor probleme la limită ale fizicii matematice prin metoda transformărilor integrale. În particular, cea mai mare parte a funcțiilor speciale sunt reprezentate prin integralele (2.5.1). În cele din urmă, într-un șir de cazuri la analiza asimptotică a integralelor de tipul (2.5.1) poate fi aplicată și la integralele definite în domeniul real prin prelungirea analitică în planul complex.

Menționăm la fel, că integralele Laplace (2.3.1) și Fourier (2.4.1) reprezintă niște forme speciale ale integralelor (2.5.1). În cazul (2.3.1) conturul C și funcțiile $f(z)$ și $S(z)$ sunt definite pe axa reală, iar în cazul (2.4.1) conturul C și funcția $f(z)$ sunt definite pe axa reală, în timp ce faza $S(z)$ este imaginară. Bineînțeles că în cazul dat trebuie de ținut cont, că restricțiile pentru funcțiile $f(z)$ și $S(z)$ în (2.5.1) sunt mai dure în comparație cu condițiile la care sunt supuse funcțiile de sub semnul integralelor Laplace și Fourier. Așa, spre exemplu, condiția de analiticitate a funcțiilor $f(z)$ și $S(z)$ în domeniul D denotă că aceste funcții în domeniul dat posedă derivate de toate ordinele, în timp ce în metoda lui Laplace și fazei staționare se cere existența numai derivatelor de ordinul doi ale funcției $S(x)$.

Vom purcede la analiza integralei (2.5.1). Derînd cu convenția despre analiticitatea funcțiilor $f(z)$ și $S(z)$ în domeniul D , vom admite că în acest domeniu funcțiile $f(z)$ și $S(z)$ sunt funcții regulate, adică, în interiorul domeniului D funcția de sub semnul integralei (2.5.1) nu posedă puncte singulare. În acest caz în conformitate cu teorema Cauchy valoarea integralei (2.5.1) depinde numai de pozițiile capetelor A și B ale conturului C și nu depinde de forma lui.

Așa dar, deformațiile arbitrare ale conturului C pentru poziții fixate ale capetelor A și B nu schimbă valoarea integralei $J(\gamma)$ (2.5.1). Deci este naturală formularea problemei despre alegerea unui așa contur C , în lungul căruia calcularea integralei $J(\gamma)$ ar fi cea mai eficientă.

Cu scopul determinării caracteristicilor conturului căutat, vom reeși din estimările modulului integralei $J(\gamma)$. Putem scri:

$$|J(\gamma)| = \left| \int_C f(z) e^{\gamma S(z)} dz \right| \leq \int_C |f(z)| |e^{\gamma S(z)}| |dz| = \int_C |f(z)| e^{\gamma u(x,y)} |dz| \quad (2.5.2)$$

Din această expresie remarcăm, mai întâi că pentru valori asimptotice ale parametrului $\gamma \gg 1$, partea principală a integralei este determinată de partea reală a funcției $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, astfel că conturul căutat (în continuare îl notăm prin Γ) trebuie ales în așa mod, ca funcția $u(x, y)$ să varieze în lungul lui cel mai rapid. Atunci, calcularea integralei $J(\gamma)$ în lungul acestui contur ar putea fi efectuată aplicând metoda lui Laplace.

Inegalitatea (2.5.2) permite de a enunța încă o proprietate a conturului optimal Γ . Alegem două contururi Γ_1 și Γ_2 din familia de contururi C , și fie că în lungul acestor contururi funcția $u(x, y)$ variază rapid, atingânduși valorile cele mai mari în punctele $(x_1, y_1) \in \Gamma_1$ și $(x_2, y_2) \in \Gamma_2$ în așa mod că $u_1 = u(x_1, y_1)$ și $u_2 = u(x_2, y_2)$. Atunci, în concordanță cu (2.5.2) din două contururi Γ_1 și Γ_2 trebuie ales acel contur, în lungul căruia valoarea cea mai mare atinsă de $u(x, y)$ este cea mai mică, dat fiind că pentru un așa contur, estimarea modulului integralei (2.5.2) va fi mai precisă.

Să formulăm în continuare relațiile precise, care determină conturul căutat Γ . Fie (x, y) un punct fixat, prin care trece conturul C , iar $u(x, y)$ – valoarea reală a funcției $S(z)$ în acest punct. În vecinătatea $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y)$ a acestui punct variația funcției $u(x, y)$ este $\delta u(x, y) \equiv u(x + \delta x, y + \delta y) - u(x, y)$ și în aproximația limită după δx și δy poate fi scrisă:

$$\delta u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y \equiv (\nabla u, \delta\vec{r}) \quad (2.5.3)$$

unde $\nabla u \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ este gradientul funcției $u(x, y)$ în punctul (x, y) . Din (2.5.3) urmează că valoarea absolută a variației δu este atinsă în direcțiile $\delta\vec{r}$, paralele gradientului funcției $u(x, y)$. În același timp, în direcțiile perpendiculare vectorului ∇u variația δu este zero. Așa dar, dacă vom deforma conturul C , care trece prin punctul (x, y) în așa mod, ca el în vecinătatea acestui punct să treacă în direcția gradientului funcției $u(x, y)$, atunci variația funcției $u(x, y)$ în lungul acestei direcții va fi maximală. Prin urmare, conturul căutat Γ în fiecare punct al său va avea tangenta paralelă vectorului $\nabla u(x, y)$ în acest punct.

Vom nota prin $\vec{\tau}$ versorul tangentei la conturul Γ în punctul (x, y) , iar prin \vec{n} versorul normalei la vectorul $\vec{\tau}$ în acest punct, așa că $(\vec{\tau}, \vec{n}) = 0$.

Aplicăm condiția Cauchy-Riemann pentru funcția analitică $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.5.4)$$

În raport cu direcțiile ortogonale determinate de vectorii \bar{n} , $\bar{\tau}$, aceste condiții capătă forma:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial n}. \quad (2.5.5)$$

Dat fiind, că pentru toate punctele conturului Γ , $\partial u / \partial n = 0$, din prima ecuație a sistemului (2.5.5) obținem imediat că în aceleași puncte $\partial v / \partial \tau = 0$, și prin urmare, în lungul conturului Γ valoarea imaginară a funcției $S(z)$ își păstrează una și aceeași valoare. În rezultat obținem, că conturul căutat Γ se află în familia curbelor definite de ecuația

$$\Gamma_C : \quad v(x, y) = C, \quad (2.5.6)$$

unde C este o constantă arbitrară. Ecuația (2.5.6) definește o întreagă familie de contururi Γ_C . Pentru conturul, care trece prin punctul $(x_C, y_C) \in D$, constanta C din formula (2.5.6) este definită de condiția $v(x, y) \equiv v(x_C, y_C)$.

Ținând cont de relațiile obținute, integrala (2.5.1) pe careva contur din familia Γ_C poate fi scrisă sub forma:

$$J(\gamma) = e^{i\gamma v(x_C, y_C)} \int_{\Gamma_C} f(z) e^{i\gamma u(x, y)} dz, \quad (x_C, y_C) \in \Gamma_C. \quad (2.5.7)$$

Referitor la reprezentarea (2.5.7) este necesar de făcut câteva remarce. În primul rând vom menționa, că, pentru a separa conturul dat din familia Γ_C este destul de separat punctul $(x_C, y_C) \in D$, atunci în calitate de așa punct poate servi unul din capetele A sau B ale conturului C în (2.5.1). Dacă acum vom cere ca acest contur să treacă prin punctul A , atunci conturul Γ_A definit de condiția $v(x, y) \equiv v(x_A, y_A)$ poate și să nu treacă prin punctul $B(x_B, y_B)$, fiindcă în caz general $v(x_A, y_A) \neq v(x_B, y_B)$. În cazul cînd în familia de curbe Γ_C nu există un contur, care unește punctele A și B , integrala (2.5.1) poate fi reprezentată sub forma unei integrale pe conturul alcătuit din sectoare, pe fiecare din ele fiind dată $v(x, y) \equiv C_1$ sau $u(x, y) \equiv C_2$. Adecvanța alegerii unui așa contur integrant se efectuează în dependență de tipul concret al funcției de sub semnul integralei (2.5.1).

Menționăm la fel, că fiindcă funcția de sub semnul integralei (2.5.7) spre deosebire de (2.5.1) nu conține factorul $e^{i\gamma u(x, y)}$ care reprezintă o funcție rapid oscilatoare pentru valori mari ale parametrului γ ($\gamma \gg 1$), calculul nemijlocit al integralei $J(\gamma)$ prin aplicarea formulelor în cvadraturi este cu mult mai comod de

efectuat reeșind din reprezentarea integralei $J(\gamma)$ sub forma (2.5.7) sau sub o formă modificată, ținând cont de alegerea conturului de integrare.

Dar efectul maxim legat de alegerea conturului din familia Γ_C este atins pentru valorile asimptotice mari ale parametrului γ ($\gamma \gg 1$). După cum am demonstrat anterior, pentru cazul $\gamma \gg 1$ la calcularea integralelor Laplace (paragraful 2.3) și Fourier (paragraful 2.4) valoarea integralei $J(\gamma)$ este determinată de comportarea funcției $S(x)$ în vecinătatea punctelor, în care ea își atinge valoarea maximală (metoda Laplace) și valorile staționare ($S'(x)=0$) în interiorul sau la capetele intervalului de integrare (metoda fazei staționare). Menționăm, că cu creșterea parametrului γ , reprezentarea asimptotică a integralei $J(\gamma)$ se apropie foarte mult de cea exactă.

În aceste împrejurări apelăm la reprezentarea integralei $J(\gamma)$ sub forma (2.5.7). În lungul conturului Γ_C , integrala $J(\gamma)$ (2.5.7) aparține clasei integralelor Laplace și pentru analiza ei pot fi aplicate metodele dezvoltate în paragraful 2.3.

În particular, dacă pe conturul Γ_C există punctul staționar $(x_0, y_0) \in \Gamma_C$ în care $u(x, y)$ își atinge valoarea sa maximală (dat fiind că poziția punctului (x, y) variază de-a lungul conturului Γ_C) și acest punct este interior, atunci în conformitate cu metoda Laplace valoarea asimptotică $J(\gamma)$ pentru $\gamma \gg 1$ este determinată de comportarea funcției de sub semnul integralei (2.5.1) în vecinătatea punctului staționar $(x_0, y_0) \in \Gamma_C$.

Prin urmare, pe de o parte apare posibilitatea deformării arbitrare a conturului C în domeniul D fără a schimba valoarea integralei $J(\gamma)$ (2.5.1) și, pe de altă parte, dacă conturul C va aparține familiei Γ_C și va trece prin punctul staționar $(x_0, y_0) \in \Gamma_C$, atunci valoarea asimptotică $J(\gamma)$ pentru $\gamma \gg 1$ poate fi determinată aplicând metoda Laplace. Vom remarca, că în aceste condiții comportarea asimptotică a integralei $J(\gamma)$ este determinată numai de un segment mic al conturului Γ_C , care trece prin punctul $(x_0, y_0) \in \Gamma_C$. Această împrejurare introduce simplificări esențiale în alegerea conturului, dat fiind că în acest caz apare posibilitatea deformațiilor arbitrare ale conturului la distanțe mari de punctul staționar.

Admitem acum, că $(x_0, y_0) \in \Gamma_C$ este punctul staționar al funcției $u(x, y)$. Atunci, în conformitate cu definirea conturului Γ_C , în acest punct avem:

$$\Gamma_C : \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial \tau} = 0 \quad (2.5.8)$$

și, prin urmare, în punctul (x_0, y_0) , ținând cont de condițiile Cauchy-Rimman (2.5.5) $\partial u / \partial n = 0$, $\partial v / \partial n = 0$. Împreună cu condiția $\partial v / \partial \tau = 0$, satisfăcută pe tot conturul Γ_C și $\partial u / \partial \tau = 0$ (2.5.8) obținem, că în punctul staționar (x_0, y_0)

$$S'(z_0) = 0 \quad (2.5.9)$$

Forma desfășurată a condiției (2.5.9) pentru părțile reală $u(x, y)$ și imaginară $v(x, y)$ ale funcției analitice $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ în (x_0, y_0) capătă forma:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \quad (2.5.10)$$

Dacă z_0 este punctul staționar definit de condiția (2.5.9), atunci conturul Γ , care trece prin acest punct în conformitate cu (2.5.6) și (2.5.10) satisface ecuația și condițiile:

$$\Gamma: \quad v(x, y) = v(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \quad (2.5.11)$$

Condițiile (2.5.11) servesc drept definiție a conturului Γ ($y = y(x)$) sub forma implicită. În acest caz problema determinării ecuației conturului Γ se reduce la problema determinării funcției implicite $y = y(x)$. Aceste întrebări au fost detaliat descrise în capitolul I. În cazul dat condițiile de existență și univocitate a funcției implicite nu sunt satisfăcute dat fiind că în punctul (x_0, y_0) avem $\partial v(x_0, y_0) / \partial x = 0$ și $\partial v / \partial y = 0$ și, prin urmare, prin punctul staționar z_0 pot trece câteva contururi Γ_c , ce corespunde cazului de bifucație a soluțiilor ecuației neliniare (2.5.11) în punctul staționar (x_0, y_0) .

Analiza soluțiilor ecuației neliniare (2.5.11) în fiecare caz concret poate fi efectuată prin metodele descrise în capitolul I. Dar, ținând cont că $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sunt părțile reală și imaginară a funcției analitice $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ pot fi formulate și unele concluzii generale în raport cu contururile Γ_c , care trec prin punctul staționar z_0 .

În acest scop vom studia comportarea părții reale $u(x, y)$ în vecinătatea punctului (x_0, y_0) , calculînd valoarea $\delta u(x_0, y_0) \equiv u(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - u(x_0, y_0)$ pe circumferința de rază mică r și cu centrul în punctul (x_0, y_0) .

Avem $\delta x = r \cos \varphi$, $\delta y = r \sin \varphi$ și ținând cont de (2.5.10) $\partial u / \partial x = 0$ și $\partial u / \partial y = 0$ în punctul (x_0, y_0) . Descompunînd $u(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ în seria Taylor în aproximația termenilor proporționali cu $(\delta x)^2$ și $(\delta y)^2$ obținem:

$$\delta u = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{xx}^0 - u_{yy}^0}{2} \cos 2\varphi + u_{xy}^0 \sin 2\varphi \right) r^2, \quad 0 < r \ll 1, \quad 0 < \varphi \leq 2\pi, \quad (2.5.12)$$

unde $u_{xx}^0 = \partial^2 u(x_0, y_0) / \partial x^2$, $u_{yy}^0 = \partial^2 u(x_0, y_0) / \partial y^2$, $u_{xy}^0 = \partial^2 u(x_0, y_0) / \partial x \partial y$.

Menționăm, că reprezentarea (2.5.12) este obținută cu convenția că punctul staționar z_0 (2.5.9) este un punct simplu, adică $S''(z_0) \neq 0$. Acesta este un caz general. În cazuri mai specifice, când odată cu $S'(z_0) = 0$, se transformă în zero și derivatele de ordin superior $S''(z_0) = 0, \dots, S^{(p)}(z_0) = 0, S^{(p+1)}(z_0) \neq 0$, punctul z_0 este un punct staționar de ordinul p . În continuare vom admite, că punctul staționar z_0 în (2.5.1) este de ordinul unu, adică $S''(z_0) \neq 0$.

Revenim la o analiză mai detaliată a expresiei δu din (2.5.12). Dacă convenim, că valorile lui r sunt fixate, atunci δu în (2.5.12) poate fi studiată ca o funcție de o singură variabilă φ . Structura expresiei δu permite de scris sub o formă explicită soluția ecuației $\delta u(r, \varphi) = 0$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{u_{xx}^0 - u_{yy}^0}{2u_{xy}^0}. \quad (2.5.13)$$

Fie că φ_1 este soluția acestei ecuații. Aceasta înseamnă, că în lungul dreptei care trece prin punctul (x_0, y_0) sub unghiul φ_1 în raport cu axa x , funcția $u(x, y)$ în vecinătatea punctului staționar își păstrează valoarea sa $u(x_0, y_0)$, dat fiind, că pe parcursul acestor direcții $\delta u = 0$. Remarcăm, că din condiția de periodicitate a tangentei $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) \equiv \operatorname{tg} \alpha$ urmează, că ecuația (2.5.13) este satisfăcută și de unghiul $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + \pi$ de unde $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. Deci unghiul φ_2 este tot o soluție a ecuației (2.5.13). În rezultat obținem, că în vecinătatea punctului staționar simplu funcția $u(x, y)$ își păstrează valoarea $u(x_0, y_0)$ și în lungul dreptei care trece prin punctul staționar perpendiculară dreptei care corespunde soluției φ_1 . Prin urmare, vecinătatea punctului staționar z_0 este împărțită de două drepte reciproc perpendiculare în 4 sectoare, în fiecare din ele funcția $\delta u(x, y)$ avînd un semn determinat, în așa fel, că în sectoarele vecine semnele funcției $\delta u(x, y)$ sunt diferite. Direcțiile acestor drepte sunt determinate de soluțiile φ și $\varphi + \pi/2$ ale ecuației (2.5.13). Vom analiza în continuare comportarea lui $\delta u(r, \varphi)$ în interiorul unui sector. Dat fiind, că $\delta u(r, \varphi)$ este o funcție continuă de argumentul φ și la granițele sectorului capătă valori nule, urmează, că în interiorul sectorului, $\delta u(r, \varphi)$ își atinge valorile sale extremale. Valorile extremale a funcției $\delta u(r, \varphi)$ se obțin din condiția $\partial \delta u(r, \varphi) / \partial \varphi = 0$ care cu condiția (2.5.12) ne conduce la ecuația

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2u_{xy}^0}{u_{xx}^0 - u_{yy}^0}. \quad (2.5.14)$$

Soluțiile acestei ecuații determină direcțiile în lungul cărora $\delta u(r, \varphi)$ capătă valorile minime sau maxime. Respectiv, în lungul aceleiași direcții are loc creșterea cea mai rapidă (sau descreșterea) funcției $u(x, y)$.

Fie că φ este soluția ecuației (2.5.14). Atunci, după cum am demonstrat $\varphi + \pi/2$ la fel este soluția ecuației (2.5.13).

Soluției φ îi corespunde dreapta, care trece prin punctul staționar sub unghiul φ față de axa x -lor, iar soluției $\varphi + \pi/2$ îi corespunde dreapta, care trece prin acest punct perpendiculară la dreapta descrisă.

În consecință, prin punctul staționar de ordinul unu întotdeauna trec două contururi, tangentele cărora sunt reciproc perpendiculare în acest punct, încât în lungul unuia din contururi funcția $u(x, y)$ foarte rapid crește, iar în lungul altuia – foarte rapid descrește. Din aceste două contururi în calculele asimptotice a integralei (2.5.7) pentru $\gamma \gg 1$ este ales conturul cu descreșterea cea mai rapidă a funcției $u(x, y)$.

Vom determina în continuare orientarea relativă a direcțiilor în lungul cărora $u(x, y)$ își păstrează valoarea $u(x_0, y_0)$ și direcțiile în lungul cărora are loc creșterea sau descreșterea cea mai rapidă a funcției $u(x, y)$. Fie φ o soluție a ecuației (2.5.13), iar ψ a ecuației (2.5.14). Înmulțind aceste două ecuații între ele obținem:

$$\operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} 2\psi = -1, \quad (2.5.15)$$

de unde $2\psi = 2\varphi + \frac{\pi}{2}$, sau

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad (2.5.16)$$

de unde urmează că direcțiile celei mai rapide creșteri sau descreșteri a funcției $u(x, y)$ coincid cu bisectoarele unghiurilor formate de direcțiile în lungul cărora $u(x, y) = u(x_0, y_0)$.

Menționăm la fel, că valorile cele mai mari și cele mai mici obținute de funcția δu în vecinătatea punctului staționar z_0 sunt egale după valoarea absolută. Într-adevăr, fie că φ_* este o soluție a ecuației (2.5.14), iar δu^* este valoarea funcției δu_0 corespunzătoare acestei soluții. Atunci, după cum am determinat mai sus, funcția δu capătă valoarea extremală și în direcția $\varphi_* + \pi/2$. Dar conform expresiei (2.5.12) $\delta u(r, \varphi_* + \pi/2) = -\delta u(r, \varphi_*)$, și, prin urmare, valorile extremale obținute de funcția δu pe circumferința de rază mică sunt egale ca valori absolute și opuse ca semn. Calculele nemijlocite a expresiei (2.5.12) pentru unghiurile φ_* , care satisfac condiției de extremum (2.5.14), conduc la valorile extremale δu :

$$\delta u_{1,2}^* = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(u_{xx}^0 - u_{yy}^0)^2}{4} + u_{xy}^0{}^2} r^2. \quad (2.5.17)$$

Notăm, în continuare, prin Γ_0^+ și Γ_0^- cele două contururi definite mai sus, care trec prin punctul staționar simplu z_0 în lungul cărora are loc cea mai rapidă variație a funcției $u(x, y)$ în așa mod că $u(x, y)$ crește pe conturul Γ_0^+ cu creșterea distanței de la punctul staționar, iar pe conturul Γ_0^- – descrește. La deplasarea în lungul conturilor funcția $u(x, y)$ este de acum funcție de o singură variabilă. Această variabilă poate fi identificată cu lungimea unei părți s a conturului, măsurată de la careva punct fix al conturului. În cazul dat măsurarea lungimii conturului este mai comod de efectuat de la punctul staționar z_0 . Atunci, în punctul z_0 $s=0$, cu creșterea lungimii conturului $s>0$, iar cu descreșterea lungimii conturului $s<0$, variabilele x și y devin funcții de acest parametru, în așa mod că $x(0) = x_0$ și $y(0) = y_0$. Cu convenția că dependențele $x(s)$ și $y(s)$ sunt diferentiabile pentru pătratul elementului de lungime a conturului avem $ds^2 = dx^2 + dy^2$, de unde ținând cont de expresiile $dx = x'(s)ds$, $dy = y'(s)ds$ ajungem la o identitate în raport cu parametrul s .

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 \equiv 1, \quad (2.5.18)$$

valabilă pentru orice contur neted.

Funcțiile $x(s)$ și $y(s)$ reprezintă ecuațiile parametrice ale conturului. Pentru a determina aceste funcții este necesar de utilizat și relațiile care definesc acest contur. În cazul conturilor Γ_0^+ și Γ_0^- aceste relații sunt formulate în (2.5.11), care mai pot fi scrise sub forma:

$$v(x(s), y(s)) = v^0, \quad v_x^0 = 0, \quad v_y^0 = 0, \quad (2.5.19)$$

unde au fost introduse notațiile: $v^0 = v(x_0, y_0)$, $v_x^0 = v_x(x_0, y_0)$, $v_y^0 = v_y(x_0, y_0)$.

Menționăm, că în raport cu parametrul s relația (2.5.19) devine identitate. Mai remarcăm, că $v(x, y)$, fiind partea imaginară a unei funcții analitice, posedă derivatele de orice ordin în raport cu argumentele x și y , și, prin urmare, posedă și derivatele de orice ordin în raport cu parametrul s .

În conformitate cu aceasta, vom căuta ecuațiile parametrice $x(s)$, $y(s)$ ale conturilor Γ_0^+ și Γ_0^- sub forma unei serii de puteri după parametrul s .

$$x(s) = x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots, \quad y(s) = y_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots. \quad (2.5.20)$$

Înlocuind (2.5.20) în (2.5.18) și (2.5.19) reducem identitățile în raport cu s , la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n s^n \equiv 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n s^n \equiv 0, \quad (2.5.21)$$

în care coeficienții A_n și B_n sunt funcții de coeficienții nedeterminați α_i și β_i . Identitățile (II.5.21) vor fi satisfăcute dacă vor fi satisfăcute egalitățile:

$$A_0 = 1, B_0 = 0, \quad A_i = 0, B_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.5.22)$$

care pot servi drept ecuații pentru determinare a coeficienților α_i și β_i .

Metoda descrisă permite în principiu determinarea tuturor coeficienților α_i și β_i , și, prin urmare, obținerea în caz general a reprezentărilor parametrice ale conturilor Γ_0^+ și Γ_0^- . Însă, dat fiind că pentru valori asimptotice mari ale parametrului $\gamma \gg 1$, în conformitate cu metoda Laplace, aportul principal în valoarea integralei este al vecinătății punctului staționar prin care trece conturul dat, pentru analiza asimptotică a integralei $J(\gamma)$ este suficient de ținut cont de primii coeficienți în reprezentarea conturului (2.5.20). Aceasta va reprezenta definiția conturului în vecinătatea punctului (x_0, y_0) .

Vom începe calculele nemijlocite pentru cazul cel mai simplu, definind conturile Γ_0^+ și Γ_0^- în vecinătatea punctului (x_0, y_0) sub forma:

$$x(s) \approx x_0 + \alpha_1 s, \quad y(s) \approx x_0 + \beta_1 s, \quad (2.5.23)$$

Funcțiile $x(s)$ și $y(s)$ reprezintă ecuația familiei biparametrice de drepte, care trec prin punctul (x_0, y_0) . Pentru valorile fixate ale coeficienților α_1 , β_1 expresia (2.5.3) descrie tangenta la familiile de contururi Γ (2.5.20) pentru aceleași valori ale coeficienților α_1 , β_1 .

Vom scri sub forma explicită și condiția (2.5.19) în vecinătatea punctului (x_0, y_0) , descompunând funcția $v(x(s), y(s))$ în serie după puterile $\delta x(s) = x(s) - x_0$ și $\delta y(s) = y(s) - x_0$ și păstrînd în această descompunere numai termenii proporționali pătratelor mărimilor δx , δy (termenii liniari în descompunere se transformă în zero potrivit condițiilor (2.5.19)). În această aproximație obținem:

$$v_{xx}^0 \alpha_1^2 + 2v_{xy}^0 \alpha_1 \beta_1 + v_{yy}^0 \beta_1^2 = 0, \quad (2.5.24)$$

unde au fost introduse notațiile: $v_{xx}^0 = v_{xx}(x_0, y_0)$, $v_{xy}^0 = v_{xy}(x_0, y_0)$, $v_{yy}^0 = v_{yy}(x_0, y_0)$.

Identitatea (2.5.19) pentru conturile (2.5.23) capătă forma

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1. \quad (2.5.25)$$

Înlocuind $\alpha_1 = \cos \varphi$, $\beta_1 = \sin \varphi$ și rezolvînd ecuația (2.5.24) în raport cu necunoscuta φ , obținem soluția:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{v_{xx}^0 - v_{yy}^0}{v_{xy}^0}. \quad (2.5.26)$$

Menționăm, că parametrul φ coincide cu unghiul de înclinare a dreptei (2.5.23) în raport cu axa x . Într-adevăr $\hat{\delta}x = x(s) - x_0 = \alpha_1 s = s \cos \varphi$, și, prin urmare, (2.5.26) definește unghiul de înclinare a tangentei la contur în punctul (x_0, y_0) . Remarcăm, că reeșind din alte raționamente același unghi a fost definit de expresia (2.5.14). Vom demonstra, că expresiile (2.5.14) și (2.5.26) definesc unul și același unghi φ . Pentru aceasta este destul de demonstrat, că părțile drepte ale acestor expresii sunt egale. Într-adevăr, dat fiind că $u(x, y)$ și $v(x, y)$ satisfac condițiile Cauchy-Piemann (2.5.4) urmează egalitățile:

$$u_{xy}(x, y) = -v_{xx}(x, y) = v_{yy}(x, y); \quad v_{xy}(x, y) = u_{xx}(x, y) = -u_{yy}(x, y) \quad (2.5.27)$$

valabile pentru orice punct $(x, y) \in D$, în particular și în punctul (x_0, y_0) . În aceste condiții $v_{xx}^0 - v_{yy}^0 = 2v_{xx}^0 = -2u_{xy}^0$, $u_{xx}^0 - u_{yy}^0 = 2u_{xy}^0 = 2v_{xy}^0$, și, prin urmare, ambele expresii (2.5.14) și (2.5.26) se reduc la una și aceeași.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{u_{xy}^0}{v_{xy}^0}. \quad (2.5.28)$$

După cum am mai menționat ecuația (2.5.28) este satisfăcută și de valoarea unghiului $\varphi + \pi/2$, ceea ce semnifică că prin punctul staționar (x_0, y_0) trec două drepte (2.5.23) reciproc perpendiculare, tangente la contururile Γ_0^+ și Γ_0^- în acest punct.

Efectuînd transformările evidente ale expresiei (2.5.28), aceste două soluții ale ecuației (2.5.28) pot fi scrise sub forma:

$$\cos 2\varphi = \pm \frac{v_{xy}^0}{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}, \quad \sin 2\varphi = \pm \frac{u_{xy}^0}{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}. \quad (2.5.29)$$

Pentru conturul fixat, părțile drepte ale expresiilor (2.5.29) se iau cu același semn. Pentru unghiul $\varphi_1 = \varphi + \pi/2$ ambele expresii din partea dreaptă a egalităților (2.5.29) își schimbă semnul, ceea ce semnifică că soluția φ_1 caracterizează al doilea contur (din cele două care trec prin punctul (x_0, y_0)).

Pentru identificarea conturului Γ_0^- , adică a conturului, în lungul căruia $u(x, y)$ descrește cel mai rapid cu creșterea distanței de la punctul staționar, iar în punctul staționar își atinge valoarea maximă $u(x_0, y_0)$, vom scrie descompunerea funcției $u(x, y)$ în vecinătatea punctului (x_0, y_0) în serie, limitîndu-ne cu termenii proporționali cu $(\delta x(s))^2$ și $(\delta y(s))^2$. Cu reprezentarea conturului (2.5.23) și condiția (2.5.10) avem

$$u(x(s), y(s)) \approx u(x_0, y_0) + \frac{1}{2} (u_{xx}^0 \alpha_1^2 + 2u_{xy}^0 \alpha_1 \beta_1 + u_{yy}^0 \beta_1^2) s^2 + \dots \quad (2.5.30)$$

Înlocuind în (2.5.30) reprezentările $\alpha_1 = \cos \varphi$, $\beta_1 = \sin \varphi$ și ținând cont de expresiile (2.5.28) și relațiile (2.5.27), obținem expresia finală a funcției $u(x(s), y(s))$ în vecinătatea punctului staționar $(x_0, y_0) \in \Gamma$,

$$u(x(s), y(s)) \approx u(x_0, y_0) \pm \frac{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}{2} s^2 + \dots, \quad (x(s), y(s)) \in \Gamma, \quad (2.5.31)$$

în care semnul $\ll + \gg$ sau $\ll - \gg$ în expresia funcției $u(x(s), y(s))$ îi corespunde același semn și în expresiile (2.5.29). În particular, conturul Γ_0^- este determinat de semnul $\ll - \gg$ în toate expresiile (2.5.29), (2.5.31).

Revenim, în continuare, la reprezentarea (2.5.7) a integralei $J(\gamma)$ calculată de-a lungul conturul Γ_0^- sb forma:

$$J(\gamma) = e^{i\gamma v(x_0, y_0)} e^{\gamma u(x_0, y_0)} \int_{\Gamma_0^-} f(z_0) e^{-\frac{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}{2} s^2 + \dots} e^{i\varphi(s)} ds, \quad (2.5.32)$$

unde s-a ținut cont, că la deplasarea în lungul unui contur arbitrar

$$dz = e^{i\varphi(s)} ds, \quad \operatorname{tg} \varphi(s) = \frac{y'(s)}{x'(s)}. \quad (2.5.33)$$

Pentru valori asimptotice mari ale parametrului $\gamma \gg 1$, integrala $J(\gamma)$ (2.5.32) poate fi calculată aplicînd metoda Laplace. În conformitate cu această metodă termenul principal în descompunerea asimptotică a integralelor Laplace este dat de formula (2.3.39). Aplicînd această formulă putem scri reprezentarea asimptotică pentru $J(\gamma)$ în (2.5.32) și, prin urmare, și a integralelor inițiale (2.5.1):

$$J(\gamma) \approx e^{i(\gamma v(x_0, y_0) + \varphi_0)} f(x_0, y_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}} \frac{e^{\gamma u(x_0, y_0)}}{\sqrt{\gamma}}, \quad f(x_0, y_0) \neq 0, \quad \gamma \gg 1, \quad (2.5.34)$$

unde, în conformitate cu (2.5.29) φ_0 se determină din ecuațiile:

$$\cos 2\varphi_0 = -\frac{v_{xy}^0}{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}, \quad \sin 2\varphi_0 = -\frac{u_{xy}^0}{\sqrt{u_{xy}^0{}^2 + v_{xy}^0{}^2}}. \quad (2.5.35)$$

Procedeeul descris pentru obținerea formulei asimptotice (2.5.34) mai este cunoscut sub denumirea *de metoda celei mai rapide coborâri* (metoda pantei maxime).

Vom analiza în continuare cazul, când există mai multe puncte staționare. Fie că sunt k soluții ale ecuației $S'(z)=0$, iar $S''(z_{0i}) \neq 0$ pentru toate punctele staționare. Fie, în continuare, $\Gamma_{01}^-, \Gamma_{02}^-, \dots, \Gamma_{0k}^-$ - contururile celei mai rapide coborâri, definite de punctele staționare $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0k}$ respectiv și care se află în domeniul D .

Dacă toate contururile Γ_{0i}^- sunt diferite, atunci integrala $J(\gamma)$ calculată după oricare din ele capătă una și aceeași valoare. De unde urmează că în virtutea univocității descompunerii asimptotice $J(\gamma)$, expresiile (2.5.34), fiind termenii principali în descompunerea asimptotică $J(\gamma)$, trebuie să coincidă pentru toate punctele staționare.

A doua posibilitate este că toate punctele staționare $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0k}$ definesc unul și același contur Γ_0^- . În acest caz comportarea asimptotică $J(\gamma)$ pentru $\gamma \gg 1$ este obținută prin sumarea expresiilor (2.5.34), calculate pentru fiecare punct staționar.

Sesizările generale expuse pot fi foarte utile la alegerea contururilor Γ_{0i}^- în cazul existenței mai multor puncte staționare.

Așa dar, calcularea integralei $J(\gamma)$ din (2.5.1) (pentru valori asimptotice mari ale parametrului $\gamma \gg 1$) se reduce la următoarea consecutivitate de operațiuni:

1. Se definește domeniul D al planului complex z , în care funcția de sub semnul integralei este regulată. În acest domeniu deformările arbitrare ale conturului C cu capetele fixate nu schimbă valoarea integralei $J(\gamma)$.
2. Se determină punctul staționar z_0 al funcției $S(z)$, $S'(z_0)=0$. În text au fost obținute formulele pentru cazul când punctul staționar este de gradul unu, adică $S''(z_0) \neq 0$.
3. În punctul staționar se calculează mărimile $u^0 = u(x_0, y_0)$, $v^0 = v(x_0, y_0)$, $u_{xy}^0 = u_{xy}(x_0, y_0)$, $v_{xy}^0 = v_{xy}(x_0, y_0)$, $f(x_0, y_0)$ (prin convenția că $f(x_0, y_0) \neq 0$) și soluția φ_0 a ecuației (2.5.35).
4. Se calculează valoarea expresiei (2.5.34), care reprezintă termenul principal în descompunerea asimptotică $J(\gamma)$.
5. În cazul existenței mai multor puncte staționare $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0k}$ expresia (2.5.34) se calculează pentru fiecare din ele. Dacă valorile obținute nu coincid este necesară o analiză suplimentară de construire a contururilor Γ_{0i}^- . În particular, dacă într-un punct sau mai multe puncte staționare expresia (2.5.34) tinde spre infinit pentru $\gamma \gg 1$ în timp ce integrala inițială este finită, așa puncte sunt excluse.

Notă: 1. A fost efectuată o descriere detaliată pentru cazul când punctul staționar este de gradul unu ($S''(z_0) \neq 0$). Dacă în punctul staționar $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)=0, \dots, S^{(p)}(z_0)=0$, $S^{(p+1)}(z_0) \neq 0$, atunci metoda descrisă rămîne fără modificări.

Specifica, care apare în acest caz, constă numai în construirea vecinătății punctului singular și indicelui exponentei în integrala Laplace, care, în rezultat, conduce la reprezentarea asimptotică pentru $J(\gamma)$ și diferă esențial de (2.5.34).

2. Obținerea în formă generală a termenilor următori în descompunerea asimptotică pentru $J(\gamma)$ începând cu al doilea este legată de calcule simple dar voluminoase și în această lucrare nu este descrisă. Așa calcule este comod de efectuat pentru fiecare caz concret, dat fiind că, ca regulă, apare posibilitatea de a simplifica calculele respective.

Vom aplica în continuare expresia generală (2.5.34) pentru obținerea reprezentărilor asimptotice a unui șir de funcții speciale ale fizicii matematice. Aceasta ne va permite de rînd cu calculele nemijlocite ale expresiei (2.5.34) să efectuăm o analiză mai detaliată atît cu scopul ilustrării rezultatelor generale obținute mai sus, cît și cu scopul obținerii unor termeni noi în descompunerea asimptotică pentru $J(\gamma)$ ($\gamma \gg 1$).

Funcția Airy. Această funcție apare în diferite domenii ale fizicii legate de analiza funcțiilor de undă și are reprezentarea integrală [6]:

$$Ai(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\tau^3}{3} + s\tau\right) d\tau, \quad s - \text{real} . \quad (2.5.36)$$

Remarcăm, ca funcția de sub semnul integralei în (2.5.36) este rapid oscilatoare pentru *toate* valorile argumentului funcției Airy, și, ca rezultat, aplicarea procedeelelor standarde pentru calcularea valorilor $Ai(s)$ devin neeficace, iar valorile obținute în rezultatul aplicării acestor procedee pentru funcția Airy pot să difere foarte mult de valorile reale.

Cu scopul de a evidenția cele spuse mai sus vom prezenta valorile din tabele ale funcției Airy $Ai(s)$ (notate cu $Ai^{ex}(s)$) și valorile funcției Airy calculate din (2.5.36), aplicînd procedeul standard de integrare din pachetul MATHEMATICA (procedeul NIntegrate [Cos[[$\tau^3/3 + s\tau$], { $\tau, 0, \infty$ }]]/ π) (notate prin $Ai^{app}(s)$) pentru un șir de valori ale argumenului $s = 0, \pm 1, \pm 10$:

s	-10	-1	0	1	10
$Ai^{ex}(s)$	0.04024	0.53556	0.35503	0.13530	0.
$Ai^{app}(s)$	-100943	48561	45317	61500	-251955

Vom studia comportarea asimptotică a funcției $Ai(s)$ pentru $|s| \gg 1$ și vom analiza separat cazurile $s > 0$ și $s < 0$.

Cazul $s > 0$. Pentru comoditatea analizei introducem schimbul de variabile $x = \sqrt{s} \tau$ și vom scrie (2.5.36) sub forma echivalentă, ținând cont de faptul, că cosinusul este o funcție pară.

$$Ai(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{\frac{s}{3}}(x^3 - x)} dx. \quad (2.5.37)$$

Efectuăm prelungirea analitică a funcției din (2.5.37) în planul complex $z = x + iy$ introducând funcția de variabilă complexă $S(z) \equiv i\left(\frac{z^3}{3} + z\right)$, care pe axa reală trece în funcția $S(x) = i\left(\frac{x^3}{3} + x\right)$. Avem:

$$Ai(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s^{\frac{3}{2}} S(z)} dz. \quad (2.5.38)$$

Funcția de sub semnul integralei $e^{s^{\frac{3}{2}} S(z)}$ este o funcție regulată în orice domeniu finit D al planului complex z și, prin urmare, deformarea arbitrară a conturului de integrare în acest domeniu nu schimbă valoarea funcției $Ai(s)$. Conform metodei generale determinăm punctele staționare $S'(z) = i(z^2 + 1) = 0$. Deci funcția $S(z)$ are două puncte staționare. În aceste puncte $z_{01} = i$ ($x_{01} = 0, y_{01} = 1$) și $z_{02} = -i$ ($x_{02} = 0, y_{02} = -1$). În aceste puncte $S''(z_{0i}) = 2iz_{0i} = \pm 2 \neq 0$ și deci, ele sunt puncte staționare de gradul unu. Pentru analiza asimptotică a funcției $Ai(s)$ putem aplica rezultatele generale obținute mai sus. Pentru aceasta scriem expresiile explicite pentru părțile reală și imaginară a funcției $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$u(x, y) = \frac{y^3}{3} - x^2 y - y, \quad v(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x \quad (2.5.39)$$

și calculăm în punctele staționare $z_{01} = (0, 1)$ și $z_{02} = (0, -1)$ mărimile necesare pentru analiza de mai departe. Obținem:

$$\begin{aligned} u(0, \pm 1) = \mp \frac{2}{3}, \quad v(0, \pm 1) = 0, \quad u_{xx}(0, \pm 1) = \mp 2, \quad u_{xy}(0, \pm 1) = 0, \quad u_{yy}(0, \pm 1) = \pm 2, \\ v_{xx}(0, \pm 1) = 0, \quad v_{xy}(0, \pm 1) = \mp 2, \quad v_{yy}(0, \pm 1) = \mp 2. \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

Revenind la formula (2.5.34) menționăm, că în punctul staționar $z_{02} = (0, -1)$, $u(0, -1) = \frac{2}{3} < 0$ și, prin urmare, pentru $\gamma \gg 1$ integrala $J(\gamma)$ se transformă în infinit, ce este o consecință a faptului că Γ_0^- , care trece prin acest punct nu se află în domeniul de regularitate a funcției de sub semnul integralei (acest caz va fi analizat mai detaliat în continuare). Ca rezultat obținem la unica posibilitate, că conturul Γ_0^- trece prin punctul staționar $z_{01} = (0, 1)$.

În cazul funcției Airy, $f(z) \equiv 1$ și, înlocuind în (2.5.34) valorile din (2.5.40) pentru punctul staționar $z_0 = (0, 1)$ și valoarea $\varphi_0 = 0$ obținută din (2.5.35) ținând cont de (2.5.40) ($\cos 2\varphi_0 = 1$, $\sin 2\varphi_0 = 0$) obținem reprezentarea asimptotică bine cunoscută în literatură:

$$Ai(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}, \quad s \gg 1. \quad (2.5.41)$$

În cazul valorilor negative ale argumentului funcției Airy, reprezentăm funcția sub forma $Ai(-s)$, cu $s > 0$. Continuarea analitică a funcției de sub semnul integralei în (2.5.36) transformă funcția $Ai(-s)$ la forma (2.5.38) cu funcția de variabilă complexă $S(z) = i\left(\frac{z^3}{3} - z\right) = u(x, y) + iv(x, y)$, unde

$$u(x, y) = \frac{y^3}{3} - x^2y + y, \quad v(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - x. \quad (2.5.42)$$

În acest caz funcția $S(z)$ iarăși posedă două puncte staționare $z_{01} = (-1, 0)$, $z_{02} = (1, 0)$, aflate pe axa reală. În aceste puncte:

$$\begin{aligned} u(\mp 1, 0) = 0, \quad v(\mp 1, 0) = \pm \frac{2}{3}, \quad u_{xx}(\mp 1, 0) = 0, \quad u_{xy}(\mp 1, 0) = \pm 2, \quad u_{yy}(\mp 1, 0) = 0, \\ v_{xx}(\mp 1, 0) = \mp 2, \quad v_{xy}(\mp 1, 0) = 0, \quad u_{yy}(\mp 1, 0) = \pm 2, \\ \cos 2\varphi(\mp 1, 0) = 0, \quad \sin 2\varphi(\mp 1, 0) = \mp 1 \quad \left(\varphi_0(-1, 0) = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_0(1, 0) = \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

Conturul Γ_0^- trece prin punctele staționare $(-1, 0)$ și $(1, 0)$ de pe axa reală. Deci ambele puncte aparțin conturului Γ_0^- și, prin urmare, asimptotica funcției $Ai(-s)$ este determinată de suma expresiilor (2.5.34), calculate pentru fiecare punct staționar. Ținând cont de (2.5.43) putem scri:

$$Ai(-s) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}} \operatorname{Re} \left(e^{i\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)} \right) = \frac{\cos\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}} \equiv \frac{\sin\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}}, \quad s \gg 1.$$

În rezultat obținem reprezentarea asimptotică a funcției Airy pentru valori mari negative ale argumentului:

$$Ai(-s) \approx \frac{\sin\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}}, \quad s \gg 1. \quad (2.5.44)$$

Așa dar, după cum demonstrează calculele efectuate, obținerea termenului principal în descompunerea asimptotică a integralelor care conțin un parametru prin metoda pantei maxime se reduce la calcule simple a expresiilor (2.5.34) în punctele staționare și nu cer construirea conturilor Γ_0^- .

Tot odată, în cazul necesității obținerii termenilor următori în descompunerile asimptotice este necesar de utilizat informația mai detaliată despre comportarea conturului celei mai rapide coborâri. În continuare, vom efectua o așa analiză pentru funcția Airy, utilizând informația despre contururi obținută mai sus.

Cazul $s > 0$. În acest caz conturul Γ_0^- celei mai rapide coborâri, care trece prin punctul staționar $z_{01} = (0, 1)$, satisface ecuația (2.5.11). Ținând cont de expresia (II.5.39), ecuația pentru $v(x, y)$ capătă forma:

$$\frac{x^3}{3} - xy^2 + x = 0. \quad (2.5.45)$$

Menționăm, că această ecuație este satisfăcută și de conturul, care trece prin punctul staționar $z_{02} = (0, -1)$. Soluțiile ecuației (2.5.45) sunt reprezentate de liniile $x = 0$ (axa y) și $y_{1,2}(x) = \pm\sqrt{1+x^2/3}$. Linia $y_1(x) = \sqrt{1+x^2/3}$ trece prin punctul staționar $(0, 1)$, iar linia $y_2(x) = -\sqrt{1+x^2/3}$ prin punctul $(0, -1)$. Așa dar, în conformitate cu rezultatele generale, prin fiecare punct staționar z_{01} și z_{02} trec două linii tangente la care în aceste puncte sunt reciproc perpendiculare. În particular, prin punctul $z_{01} = (0, 1)$ trec liniile

$$x = 0, \quad y(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}, \quad (2.5.46)$$

în așa mod, că în lungul uneia din ele $u(x, y)$ în punctul staționar își atinge valoarea maximală, iar în lungul alteia – valoarea minimală. Cel mai simplu este de determinat comportarea funcției $u(x, y)$ în lungul limitei $x = 0$. În acest caz

$u(0, y) = \frac{y^3}{3} - y$. Dat fiind, că $u''(0, 1) = 2 > 0$ pentru $y = 1$, urmează că în lungul acestei linii $u(0, y)$, în punctul staționar, capătă cea mai mică valoare, și, deci, conturul celei mai rapide coborâri Γ_0^- , care trece prin acest punct are forma:

$$\Gamma_0^-: \quad y(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}. \quad (2.5.47)$$

Pentru $|x| \gg 1$ conturul Γ_0^- are asimptotele $y(x) \approx \frac{|x|}{\sqrt{3}}$, și, prin consecință, capetele lui tind spre infinit după dreptele care formează cu axa x -lor unghiul $\frac{\pi}{6}$ pentru $x > 0$, și $\frac{5\pi}{6}$ pentru $x < 0$. (vezi Fig. 2.5.1).

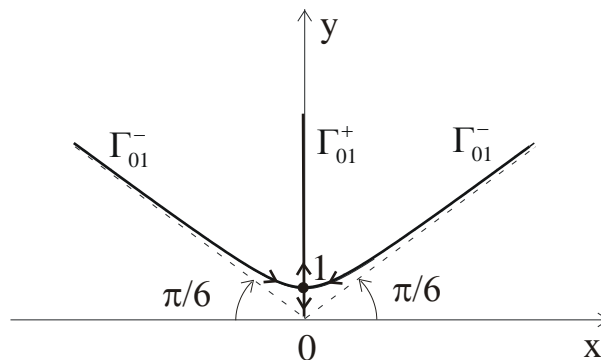


Fig. 2.5.1

(În Fig. sunt arătate direcțiile de creștere a funcției $u(x, y)$ în lungul conturilor).

Comportarea asimptotică a conturului Γ_0^- fiind determinată este necesar de menționat următoarele: pentru funcția de sub semnul integralei $e^{S(z)}$ în reprezentarea integrală a funcției $Ai(s)$ (2.5.38) punctul de la infinit în planul complex z este un punct singular esențial, adică, în vecinătatea acestui punct funcția de sub semnul integralei poate obține valori fixate apriori. În legătură cu aceasta este necesar de clarificat dacă este posibilă deformarea conturului inițial, care coincide cu axa reală, prin contopirea lui cu conturul Γ_0^- .

Dat fiind că integrala inițială există, în rezultatul acestei deformații în vecinătatea punctului infinit, partea reală a funcției de sub semnul integralei trebuie să tindă spre zero, în caz contrar integrala în lungul acestui contur se transformă în infinit. Prin consecință, partea reală a funcției $S(z)$ în rezultatul deformării conturului trebuie să fie negativă. Să studiem comportarea funcției $S(z)$ în vecinătatea punctului infinit. În acest domeniu $S(z) \approx \frac{iz^3}{3}$ sau, utilizând reprezentarea trigonometrică a

numerelor complexe ($z = re^{i\varphi}$) $S(z) \approx \frac{r^3}{3} e^{i(3\varphi + \frac{\pi}{2})}$ ($r \gg 1$), obținem, că partea reală este $u(x, y) \approx -\frac{r^3}{3} \sin 3\varphi$. Așa dar, partea reală $u(x, y)$ va fi negativă dacă $\sin 3\varphi > 0$ sau:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} < \varphi < \pi, \quad \frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}. \quad (2.5.48)$$

Obținem un rezultat principal, că vecinătatea punctului infinit este descompusă în șase sectoare identice. În trei din ele, definite de condițiile (II.5.48) funcția de sub semnul integralei (2.5.38) tinde spre zero, în celelalte trei – spre infinit. Conturul Γ_{01}^- (2.5.47) pleacă în vecinătatea punctului infinit sub unghiul $\varphi = \frac{\pi}{6}$ în raport cu axa reală cu capătul său din dreapta, și sub unghiul $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ - cu cel din stânga, și, în consecință, ambele capete se află în sectoarele (2.5.48). Prin urmare, suprapunerea conturului inițial cu conturul Γ_{01}^- este permisă, iar reprezentarea funcției (2.5.38) în forma (2.5.27) este legitimă.

$$Ai(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_{01}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dz = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \int_{\Gamma_{01}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dx. \quad (2.5.49)$$

În (2.5.49) $u(x, y)$ este descrisă de expresia (2.5.39), iar ecuația conturului Γ_{01}^- de (2.5.47).

În orice punct $(x, y) \in \Gamma_{01}^-$ x și y sunt descrise de relația (2.5.47), și, prin urmare, pe contur funcția $u(x, y) \equiv u(x, y(x))$ poate fi studiată ca o funcție de variabila x , iar reprezentarea (2.5.49) pentru funcția Airy capătă forma:

$$Ai(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{s^{\frac{3}{2}}h(x)} dx, \quad s > 0. \quad (2.5.50)$$

Expresia explicită pentru funcția $h(x)$ poate fi obținută înlocuind $y(x)$ din (2.5.47) în (2.5.39). Obținem:

$$h(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{x^2}{3}} \left(1 + \frac{4}{3} x^2 \right). \quad (2.5.51)$$

Reprezentarea (2.5.50) pentru funcția Airy este valabilă pentru orice $s > 0$ și împreună cu (2.5.36) poate fi examinată drept definiție a funcției $Ai(s)$. Pentru $s \gg 1$ integrala (2.5.50) aparține clasei integralelor Laplace și pentru analiza ei pot fi aplicate rezultatele obținute mai sus pentru analiza acestei clase de integrale.

În particular, termenul principal al descompunerii asimptotice în integralele Laplace este descris de formula (2.3.39). În cazul funcției Airy (2.5.50) avem: $S(x) \equiv h(x)$, $f(x) \equiv 1$, $c=0$, $S(0) = h(0) = -2/3$, $S''(0) = -2$.

În conformitate cu (2.3.39) obținem:

$$Ai(s) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} s^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}}, \quad s \gg 1, \quad (2.5.52)$$

care coincide cu (2.5.41). Termenii de corectare a reprezentării (2.5.52) pot fi calculați din formula (2.3.43).

Odată cu reprezentarea funcției Airy sub forma (2.5.50) vom prezenta la fel expresia ei echivalentă:

$$Ai(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{h(s,\tau)} d\tau, \quad h(s,\tau) = -\frac{2}{3} \sqrt{s + \frac{\tau^2}{3}} \left(s + \frac{4}{3} \tau^2 \right), \quad s \geq 0, \quad (2.5.50a)$$

obținută din (2.5.50) printr-un simplu schimb al valorii de integrare $\tau = \sqrt{s} x$.

Reprezentarea (2.5.50a) este comodă pentru calcularea directă a funcției $Ai(s)$ pentru toate valorile argumentului $s \geq 0$. În particular, calcularea valorilor $Ai(s)$ după formula (2.5.50a), cu aplicarea procedurii standard de integrare NIntegrate din pachetul MATHEMATICA conduce la valorile, care coincid cu cele din tabelele pentru toate $s \geq 0$.

În continuare vom construi conturul Γ_0^- pentru cazul argumentului negativ al funcției Airy. Din studiul de mai sus urmează că în acest caz există două puncte staționare $(\mp 1, 0)$, iar contururile, care trec prin aceste puncte, în lungul cărora variația funcției $Ai(-s)$ se efectuează cel mai rapid, satisfac ecuațiile $v(x, y) = v(\mp 1, 0)$

$$\Gamma_0^{\pm} : \quad \frac{x^3}{3} - xy^2 - x = \pm \frac{2}{3}. \quad (2.5.53)$$

Semnul $\langle\langle + \rangle\rangle$ în (2.5.53) corespunde ecuației conturilor care trec prin punctul $(-1, 0)$, iar semnul $\langle\langle - \rangle\rangle$ – prin punctul $(1, 0)$.

Remarcăm, mai întâi, că contururile definite de expresia (2.5.53) sunt simetrice față de y . Într-adevăr, expresia (2.5.53) rămâne invariantă dacă concomitent cu schimbul $x \rightarrow -x$, schimbăm și semnul din partea dreaptă.

$$y^2(x) \equiv y^2(-x). \quad (2.5.54)$$

Ținând cont de această proprietate de simetrie este suficient de efectuat analiza soluției ecuației (2.5.53) pentru unul din punctele staționare $(\mp 1, 0)$. Vom studia punctul $(1, 0)$ și respectiv vom păstra în partea dreaptă a expresiei (2.5.53) semnul $\langle\langle - \rangle\rangle$. Analiza expresiei (2.5.53) devine mai simplă, dacă introducem variabila nouă $x = 1 + \tau$, în raport cu care ecuația (2.5.53), scrisă pentru punctul $(1, 0)$ capătă forma:

$$y^2(1 + \tau) = \tau^2 \left(1 + \frac{\tau}{3} \right), \quad (2.5.55)$$

care permite de a scrie imediat rădăcinile ei în forma explicită:

$$y_1(\tau) = \tau \sqrt{\frac{3 + \tau}{3(1 + \tau)}}, \quad y_2(\tau) = -\tau \sqrt{\frac{3 + \tau}{3(1 + \tau)}}. \quad (2.5.56)$$

Revenind la variabila x , pentru soluțiile (2.5.56) obținem:

$$y_1(x) = (x - 1) \sqrt{\frac{x + 2}{3x}}, \quad y_2(x) = (1 - x) \sqrt{\frac{x + 2}{3x}}. \quad (2.5.57)$$

Ecuațiile (2.5.56) descriu două contururi Γ_0^+ și Γ_0^- , care trec prin punctul staționar $(1, 0)$ și în lungul cărora variația funcției $u(x, y)$ în (2.5.42) se efectuează cel mai rapid, astfel, că în lungul unuia din aceste contururi $u(x, y)$ crește cel mai rapid, atingându-și valoarea minimă, iar în lungul altui contur – descrește, atingându-și în același punct valoarea maximă.

Tangentele la aceste linii $y_1(x)$ și $y_2(x)$ în punctul $(1, 0)$ sunt reciproc perpendiculare ca consecință din (2.5.56), fiindcă în vecinătatea valorii $x = 1$, $y_1(\tau) \approx \tau$, $y_2(\tau) \approx -\tau$. În raport cu variabila x , $y_1(x) \approx x - 1$ și $y_2(x) \approx 1 - x$, și respectiv, $y_1'(1) = 1$, $y_2'(1) = -1$.

Pentru $x \rightarrow 0$ $y_1(x) \rightarrow -\infty$, $y_2(x) \rightarrow \infty$, dar pentru $x \rightarrow \infty$ $y_1(x) \approx \frac{x}{\sqrt{3}}$,
 $y_2(x) \approx -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Din analiza comportării asimptotice ale funcțiilor $y_1(x)$ și $y_2(x)$ menționăm, că contururile descrise de aceste funcții își au capetele la infinit. Astfel că capetele conturului corespunzător soluției $y_1(x)$ se află în domeniul $\frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}$ (pentru $x \rightarrow 0$) și $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ (pentru $x \gg 1$) în care funcția de sub semnul integralei reprezentării $Ai(-s)$ tinde spre zero. Așa dar, soluția $y_1(x)$ descrie conturul Γ_{02}^- , care trece prin punctul staționar $(1, 0)$ și în lungul căruia $u(x, y)$ descrește cel mai rapid, atingându-și cea mai mare valoare în punctul $(1, 0)$.

$$\Gamma_{02}^- : \quad y_1(x) = (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{3x}}. \quad (2.5.58)$$

Respectiv, soluția $y_2(x)$ descrie conturul Γ_{02}^+ , în lungul căruia are loc cea mai rapidă creștere a funcției $u(x, y)$ (2.5.42).

Ținând cont de proprietatea de simetrie (2.5.54) a soluțiilor, graficele conturilor $\Gamma_{01}^\pm, \Gamma_{02}^\pm$ sunt reprezentate în Fig. 2.5.2. (Sunt indicate direcțiile creșterii funcției $u(x, y)$).

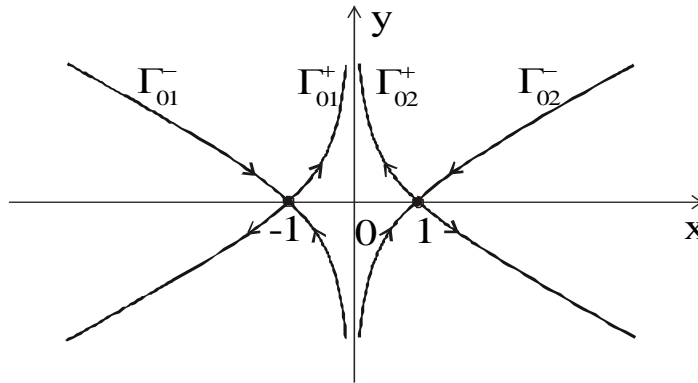


Fig. 2.5.2.

Din analizele calitative și asimptotice ale soluțiilor ecuațiilor (2.5.53) putem face concluzia că conturul inițial de integrare în reprezentarea integrală a funcției $Ai(-s)$ care coincide cu axa reală, poate fi deformat în conturul $\Gamma_{01}^- + \Gamma_{02}^-$ și atunci:

$$Ai(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi} \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \int_{\Gamma_{01}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dz + e^{-i\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}} \int_{\Gamma_{02}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dz \right). \quad (2.5.59)$$

Întroducem notațiile:

$$J_{1x}^-(s) = \int_{\Gamma_{01}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dx, \quad J_{1y}^-(s) = \int_{\Gamma_{01}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dy, \quad J_{2x}^-(s) = \int_{\Gamma_{02}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dx, \quad J_{2y}^-(s) = \int_{\Gamma_{02}^-} e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dy. \quad (2.5.60)$$

Utilizând definiția funcției $u(x, y)$ (2.5.42), de unde urmează $u(x, y) \equiv u(-x, y)$, și proprietatea (2.5.54) pentru $\Gamma_{01}^-, \Gamma_{02}^-$, obținem:

$$J_{1x}^-(s) = J_{2x}^-(s), \quad J_{1y}^-(s) = -J_{2y}^-(s). \quad (2.5.61)$$

Egalitatea a doua este consecință a relațiilor $dy = y'(x)dx$ și $y_1'(x)|_{\Gamma_{01}^-} \equiv -y_1'(-x)|_{\Gamma_{01}^-}$.

Înlocuind în (2.5.59) $dz = dx + idy$ și ținând cont de egalitățile (2.5.61) obținem reprezentarea funcției $Ai(-s)$ sub o formă comodă pentru aplicarea metodei Laplace:

$$Ai(s) = \frac{\sqrt{s}}{\pi} \left(J_{2x}^-(s) \cos \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + J_{2y}^-(s) \sin \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \right), \quad (2.5.62)$$

cu relațiile $y(x) = (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{3x}}$, $u(x, y) = \frac{y^3}{3} - x^2 y + y$, $J_{2x}^-(s) = \int_0^\infty e^{s^{\frac{3}{2}}h(x)} dx$, $J_{2y}^-(s) =$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{s^{\frac{3}{2}}u(x,y)} dy = \int_0^\infty e^{s^{\frac{3}{2}}h(x)} y'(x) dx, \quad \text{unde } h(x) \equiv u(x, y(x)) = -\frac{2(x-1)^2(4x^2+4x+1)}{9x} \sqrt{\frac{x+2}{3x}}.$$

Din (2.5.63) urmează că atât pentru $x \rightarrow 0$ cât și pentru $x \rightarrow \infty$, $h(x) \rightarrow \infty$, iar în vecinătatea punctului $x=1$ $h(x) \approx -2(x-1)^2$, $y'(x) \approx 1$ și, în consecință în conformitate cu metoda Laplace pentru $s \gg 1$ termenul principal în reprezentarea asimptotică a integralelor $J_{2x}^-(s)$ și $J_{2y}^-(s)$ se calculează cu formula (2.3.39)

$$J_{2x}^-(s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s^{\frac{3}{4}}}, \quad J_{2y}^-(s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s^{\frac{3}{4}}}, \quad s \gg 1,$$

iar, ținând cont de (2.5.62), obținem reprezentarea asimptotică a funcției Airy:

$$Ai(-s) \approx \frac{\cos\left(\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sin\left(\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi} s^{\frac{1}{4}}}, \quad s \gg 1,$$

care coincide cu (2.5.44). Termenii următori în descompunerea asimptotică a funcției Airy pot fi obținuți utilizând procedeele descrise în §3.

Funcțiile Bessel $J_n(x)$. În acest compartiment vom obține reprezentarea asimptotică pentru funcțiile Bessel cu indicele întreg n pentru valori mari ale argumentului $x \gg 1$. Menționăm, că expresia asimptotică a funcției $J_n(x)$ pentru $x \gg 1$ a fost definită în exemplul 2.4.1(vezi f.f.(2.4.36), (2.4.38)) în metoda fazelor staționare.

Vom studia în continuare comportarea asimptotică a funcției $J_n(x)$, aplicând metoda celei mai rapide coborâri dezvoltată în acest paragraf. Vom reeși din reprezentarea integrală a funcției Bessel [21] definită în planul complex $z = x + iy$:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (2.5.63)$$

Funcția de sub semnul integralei (2.5.63) este analitică în tot planul și regulară în același plan cu excepția originii de coordonate ($z=0$) și punctului infinit ($z=\infty$), care sunt puncte esențial singulare pentru funcția de sub semnul integralei.

Așa dar, funcția de sub semnul integralei (2.5.63) este regulară în domeniul D format din tot planul z cu excepția a două puncte $z=0$ și $z=\infty$.

În conformitate cu teorema Cauchy deformațiile arbitrare ale conturului de integrare în (2.5.63) în domeniul D nu schimbă valoarea integralei, adică mărimea $J_n(x)$. Integrala (2.5.63) aparține tipului de integrale (2.5.61). În cazul dat

$$S(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z}\right), \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad (2.5.64)$$

iar C este conturul închis.

Potrivit metodei pantei maxime găsim punctele staționare ale funcției $S(z)$.

$$z_{01} = (0, 1), \quad z_{02} = (0, -1) \quad (2.5.65)$$

și valorile părților reală și imaginară a funcției $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)}, \quad v(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)}. \quad (2.5.66)$$

Termenul principal al descompunerii asimptotice $J_n(x)$ pentru $x \gg 1$ poate fi obținut din formula generală (2.5.34), calculând această expresie în două puncte staționare z_{01} și z_{02} și sumând rezultatele calculelor.

Ținând cont de formulele (2.5.66), (2.5.35) și (2.5.34) obținem:

$$u(x_{01}, y_{01}) = u(x_{02}, y_{02}) = 0, \quad v(x_{01}, y_{01}) = 1, \quad v(x_{02}, y_{02}) = -1,$$

$$u_{xy}^0(x_{01}, y_{01}) = 2, \quad u_{xy}^0(x_{02}, y_{02}) = -2, \quad v_{xy}^0(x_{01}, y_{01}) = v_{xy}^0(x_{02}, y_{02}) = 0,$$

$$\cos 2\varphi_{01} = \cos 2\varphi_{02} = 0, \quad \sin 2\varphi_{01} = -1, \quad \sin 2\varphi_{02} = 1 \quad \left(\varphi_{01} = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_{02} = \frac{\pi}{4} \right),$$

$$f(z_{01}) = \frac{1}{2\pi i^{n+2}} = -\frac{1}{2\pi i^n}, \quad f(z_{02}) = \frac{1}{2\pi(-i)^{n+1}i} = \frac{(-1)^n}{2\pi i^n}.$$

Înlocuind valorile obținute în (2.5.34) căpătăm pentru $J_n(x)$ expresia:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \gg 1, \quad (2.5.66a)$$

care coincide cu (2.4.35). În (2.5.66a) sa ținut cont de faptul, că rezultatul obținut din (2.5.34) trebuie înmulțit la (-1), dat fiind că integrarea în (2.5.63) se efectuează în direcție opusă mișcării acelor ceasornicului (în timp ce la deducerea formulei (2.5.34) conturul se socoate deschis).

Vom da o analiză mai detaliată pentru obținerea descompunerii asimptotice a funcției $J_n(x)$, bazată pe construirea conturului celei mai rapide coborâri, și deformarea conturului inițial în reprezentarea integrală (2.5.63) în conturul construit. După o așa deformație a conturului devine posibilă aplicarea metodei Laplace pentru analiza asimptotică a funcției $J_n(x)$, analogic cum am procedat la studierea comportării asimptotice a funcției Airy.

Contururile Γ_{01}^+ , Γ_{01}^- , în lungul cărora are loc cea mai rapidă variație a funcției $u(x, y)$ și care trec prin punctul staționar $z_{01} = (0, 1)$ cât și contururile Γ_{02}^+ , Γ_{02}^- , care trec prin punctul staționar $z_{02} = (0, -1)$ sunt definite de ecuația comună (2.5.11), care în cazul dat, cu expresia (2.5.66) capătă forma:

$$\Gamma_{01}^\pm: \quad \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)} = 1; \quad \Gamma_{02}^\pm: \quad \frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} = -1. \quad (2.5.67)$$

Dat fiind că expresia din paranteze în ecuațiile (2.5.67) este pozitivă, din (2.5.67) imediat reesă, că contururile Γ_{01}^\pm în întregime se află în semiplanul de sus (fiindcă pentru ele $y \geq 0$), iar Γ_{02}^\pm - în cel de jos (fiindcă pentru ele $y \leq 0$). În ambele cazuri valoarea $y = 0$ poate fi realizată numai pentru $x = 0$. Ecuațiile (2.5.67) permit de a sustrage încă o concluzie generală despre proprietățile conturilor Γ_{01}^\pm , Γ_{02}^\pm . Dat fiind că în ambele ecuații variabila x este la puterea pară, urmează, că dacă punctul (x, y) aparține unuia din contururi, atunci punctul $(-x, y)$ la fel aparține unuia din aceste contururi. Pot apărea două posibilități. În una din ele ambele contururi pot fi simetrice față de x , iar în al doilea - unul din contururi se obține prin reflecția celuilalt față de y . Care din aceste situații este realizată în realitate, poate fi determinată printr-o analiză mai detaliată a soluțiilor ecuațiilor (2.5.67). Menționăm, că dacă fiecare din ecuațiile (2.5.67) ar avea numai o singură soluție, atunci această soluție în mod obligatoriu ar fi simetrică față de operația $x \rightarrow -x$ și, prin urmare, conturul determinat de această soluție ar fi simetric în raport cu axa y .

Pînă a construi contururile Γ_{01}^{\pm} , Γ_{02}^{\pm} mai remarcăm, că a doua ecuație în (2.5.67) se obține din prima prin substituția $y \rightarrow -y$. De unde urmează, că contururile Γ_{02}^{\pm} , care trec prin punctul staționar $z_{02} = (0, -1)$ se obțin printr-o simplă reflecție a conturilor Γ_{01}^{\pm} în raport cu axa reală. Respectiv, în continuare vom analiza detaliat numai contururile Γ_{01}^{\pm} , care trec prin punctul staționar $z_{01} = (0, 1)$.

Rezolvînd prima din ecuațiile (2.5.67) în raport cu variabila x obținem două ecuații care descriu contururile Γ_{01}^{\pm} :

$$x_1(y) = \sqrt{\frac{y}{2-y}}(y-1), \quad x_2(y) = \sqrt{\frac{y}{2-y}}(1-y). \quad (2.5.68)$$

Dat fiind că $y > 0$, iar din soluțiile (2.5.68) $2-y > 0$ urmează că pentru ambele contururi Γ_{01}^{\pm} variabila y variază în intervalul $(0, 2)$ în așa mod că unul din capetele conturilor coincide cu originea de coordonate $(0, 0)$, iar altul este la infinit ($x_1(y) \rightarrow \infty$, $x_2(y) \rightarrow -\infty$, pentru $y \rightarrow 2$). Menționăm, că $x_2(y) \equiv -x_1(y)$ în deplină concordanță cu proprietățile generale ale conturilor.

Pentru identificarea soluției concrete, care descrie conturul, în lungul căruia are loc cea mai rapidă descreștere a funcției $u(x, y)$ cu creșterea distanței de la punctul staționar $(0, 1)$, notat prin Γ_{01}^- , vom analiza comportarea funcției $u(x, y)$ pentru $x = x_1(y)$ și $x = x_2(y)$.

Calcululele nemijlocite ale funcției $u(x, y)$ conduc la expresiile:

$$u_1(y) \equiv u(x_1(y), y) = 2 \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y(2-y)}} > 0, \quad u_2(y) \equiv u(x_2(y), y) = -2 \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y(2-y)}} < 0. \quad (2.5.69)$$

Prin urmare, $x_1(y)$ descrie conturul în lungul căruia cu creșterea distanței de la punctul staționar $(0, 1)$ funcția $u(x, y)$ crește monoton (conturul Γ_{01}^+), iar $x_2(y)$ – descrește monoton (conturul Γ_{01}^-). Rezultatele analizei efectuate sunt reprezentate în Fig. 2.5.3 (sunt indicate direcțiile creșterii funcției $u(x, y)$ la deplasarea punctului (x, y) în lungul conturului).

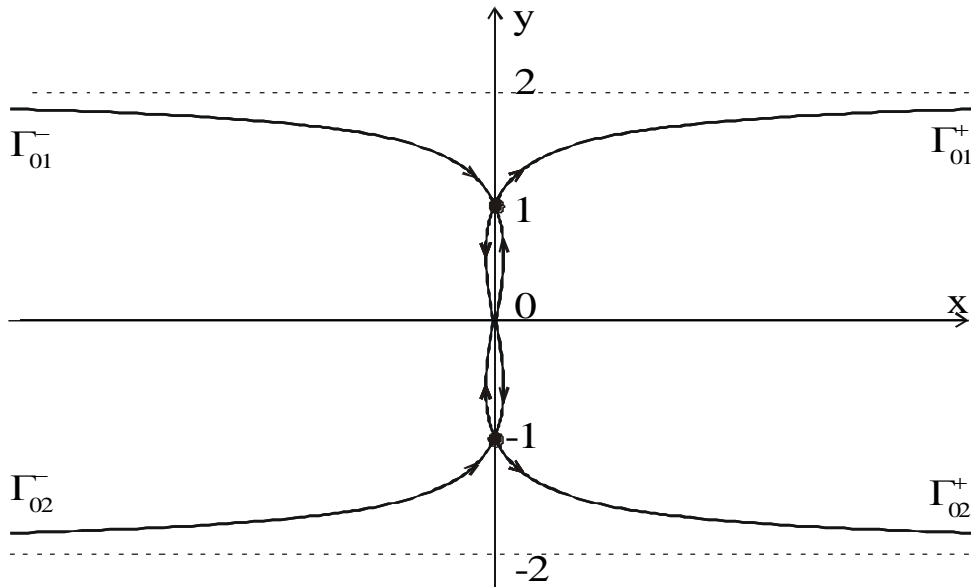


Fig. 2.5.3

Așa dar, în rezultaul analizei efectuate obținem, că pentru aplicarea eficace a metodei pantei maxime în obținerea descompunerii asimptotice a funcției $J_n(x)$ este necesar de deformat conturul inițial (cerc unitar) din reprezentarea funcției $J_n(x)$ (2.5.63) în conturul $\Gamma_{01}^- + \Gamma_{02}^-$ în așa mod că semicercul de sus să fie deformat în conturul Γ_{01}^- , iar cel de jos – în conturul Γ_{02}^- .

Ținând cont de deformările conturului de integrare descrise mai sus, la fel și de faptul, că în lungul conturilor cu cea mai rapidă coborîre $v(x, y) = v(x_{0i}, y_{0i})$, reprezentarea integrală (2.5.63) pentru funcția Bessel capătă forma (notăm în continuare argumentul funcției Bessel prin s):

$$J_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{01}^- + \Gamma_{02}^-} e^{\frac{s}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} (I_{n1}(s) + I_{n2}(s)), \quad (2.5.70)$$

unde

$$I_{n1}(s) = \int_{\Gamma_{01}^-} e^{\frac{s}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}} = e^{is} \int_{\Gamma_{01}^-} e^{su(x,y)} \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad I_{n2}(s) = \int_{\Gamma_{02}^-} e^{\frac{s}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}} = e^{-is} \int_{\Gamma_{02}^-} e^{su(x,y)} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Vom concretiza regula de parcurgere a conturilor Γ_{01}^- și Γ_{02}^- în integralele curbilinii $I_{n1}(s)$ și $I_{n2}(s)$, reeșind din direcția de parcurgere a conturului unitar inițial în integrala (2.5.63). Dat fiind că Γ_{01}^- corespunde semicercului de sus al conturului unitar inițial, parcurs în direcția opusă direcției mișcării acelor ceasornicului, deplasării în lungul acestui semicerc de la $\varphi = 0$ până la $\varphi = \pi$ îi corespunde deplasarea în lungul conturului Γ_{01}^- din originea de coordonate (0,0) la infinit. Deplasării în lungul semicercului de jos a conturului inițial de la $\varphi = \pi$ până la

$\varphi = 2\pi$ îi corespunde deplasarea în lungul conturului Γ_{02}^- de la infinit pînă în originea de coordonate (vezi Fig. 2.5.3). În continuare este comod de efectuat integrarea în $I_{n2}(s)$ în lungul conturului Γ_{02}^- luînd drept punct inițial punctul $(0,0)$. Atunci, integrala în $I_{n2}(s)$ trebuie luată cu semnul $\langle\langle - \rangle\rangle$. În continuare vom ține cont de proprietățile de simetrie ale conturilor Γ_{01}^- și Γ_{02}^- care constau în faptul, că dacă punctul $(x, y) \in \Gamma_{01}^-$ ($z \in \Gamma_{01}^-$) atunci $(x, -y) \in \Gamma_{02}^-$ ($z^* \in \Gamma_{02}^-$). Pentru valori curente ale lui x , valorile funcției $u(x, y)$ pe ambele contururi coincid, dat fiind că $u(x, y) \equiv u(x, -y)$, iar variabilei $z(x, y)$ și dz pe conturul Γ_{01}^- îi corespunde $z(x, -y) = z^*$ și dz^* pe conturul Γ_{02}^- . În rezultat obținem relația dintre valorile $I_{n1}(s)$ și $I_{n2}(s)$,

$$I_{n2}(s) = -e^{-is} \int_{\Gamma_{01}^-} e^{su(x,y)} \frac{dz^*}{z^{*n+1}} = -I_{n1n1}^*(s),$$

iar reprezentarea pentru funcția Bessel (cu relația dintre numerele complexe $w - w^* = 2i \operatorname{Im}(w)$) capătă forma:

$$J_n(s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(e^{is} \int_{\Gamma_{01}^-} e^{su(x,y)} \frac{dz}{z^{n+1}} \right), \quad (2.5.71)$$

echivalentă relației (2.5.70).

Vom reduce (2.5.71) la o formă mai comodă pentru analize și calcule nemijlocite. Fie $x = x(\tau)$ și $y = y(\tau)$ careva definiție parametrică a conturului Γ_{01}^- în așa mod că originei conturului îi corespunde valoarea parametrului $\tau = \alpha$, iar capătului lui $-\tau = \beta$, în așa mod, că $\tau \in [\alpha, \beta]$. Vom nota $u(\tau) \equiv u(x(\tau), y(\tau))$, $z(\tau) \equiv x(\tau) + iy(\tau)$ și menționăm că, ținînd cont de (2.5.69) avem $u(\alpha) = u(\beta) = -\infty$. Integrînd în (2.5.71) prin părți obținem:

$$J_n(x) = \frac{s}{n\pi} \operatorname{Im} \left(e^{is} \int_{\alpha}^{\beta} e^{su(\tau)} \frac{u'(\tau)}{z^n(\tau)} d\tau \right) \quad (2.5.72)$$

(sa ținut cont de faptul că termenul liber se transformă în zero din cauza că $u(\alpha) = u(\beta) = -\infty$).

Reprezentăm variabila $z(\tau)$ sub formă trigonometrică:

$$z(\tau) = \rho(\tau)e^{i\varphi(\tau)}, \quad \rho(\tau) = \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\tau) = \frac{y(\tau)}{x(\tau)}, \quad (2.5.73)$$

și reprezentăm (II.5.72) în variabile reale

$$J_n(x) = \frac{s}{n\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{su(\tau)} \frac{\sin(s-n\varphi(\tau))}{\rho^n(\tau)} u'(\tau) d\tau. \quad (2.5.74)$$

În particular dacă în calitate de parametru τ vom lua variabila y , ținând cont de dependența (2.5.68), pentru variabila x , și expresia (2.5.69) pentru $u(x(y), y)$ pe conturul Γ_{01}^- , la fel și de relațiile (2.5.73) obținem:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad u(y) = -2 \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y(2-y)}}, \quad x(y) = \sqrt{\frac{y}{2-y}}(1-y),$$

$$\rho(y) = \sqrt{\frac{y}{2-y}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(y) = \frac{\sqrt{y(2-y)}}{1-y}, \quad 0 < y < 2. \quad (2.5.75)$$

Deplasînd originea de coordonate în punctul staționar $y=1$ ($y=1+\tau$) exprimăm (2.5.75) în raport cu parametrul τ :

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad u(y) = 2 \frac{\tau^2}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad x(\tau) = -\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \tau,$$

$$\rho(\tau) = \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}, \quad \operatorname{tg} \varphi(\tau) = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau}, \quad -1 < \tau < 1. \quad (2.5.76)$$

Înlocuind (2.5.76) în (2.5.74) obținem una din reprezentările integrale ale funcției Bessel, comodă pentru deducerea descompunerilor asimptotice a funcției $J_n(s)$.

Simplificări esențiale pentru descrierea conturului Γ_{01}^- pot fi obținute dacă alegem în calitate de parametru independent nu parametrul τ , dar variabila unghiulară φ și dacă exprimăm expresiile din funcția de sub semnul integralei (2.5.72) în coordonate polare $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. În aceste împrejurări $\varphi \in (0, \pi)$ dat fiind, că conturul Γ_{01}^- se află în semiplanul de sus. Ținînd cont de ecuația (2.5.68) pentru $x_2(y)$, care descrie conturul Γ_{01}^- , expresiile (2.5.69) pentru $u(x_2(y), y)$ și relațiile (2.5.75), obținem pe acest contur:

$$\rho(\varphi) = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad u(\varphi) = -\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}, \quad x(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \varphi = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \varphi,$$

$$y(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$z(\rho, \varphi) = \rho(\varphi)e^{i\varphi}, \quad dz = (\rho' + i\rho)e^{i\varphi} d\varphi, \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (2.5.77)$$

Înlocuind expresiile (2.5.77) în (2.5.71) și revenind la argumentul inițial al funcției Bessel, obținem:

$$J_n(x) = \frac{s}{n\pi} \operatorname{Im} \left(\int_0^\pi e^{xu(\varphi)} e^{i(x-n\varphi)} (\rho' + i\rho) \frac{d\varphi}{\rho^n(\varphi)} \right). \quad (2.5.78)$$

Efectuăm schimbul de variabile $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} + \tau$ și scriem (2.5.78) sub formă reală:

$$J_n(x) = I_{n1}(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + I_{n2}(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right), \quad (2.5.79)$$

unde

$$I_{n1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-xh(\tau)} (\rho_1(\tau) \cos n\tau - \rho_1'(\tau) \sin n\tau) \frac{d\tau}{\rho_1^{n+1}(\tau)},$$

$$I_{n2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-xh(\tau)} (\rho_1(\tau) \sin n\tau + \rho_1'(\tau) \cos n\tau) \frac{d\tau}{\rho_1^{n+1}(\tau)}, \quad h(\tau) \equiv -u\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau},$$

$$\rho_1(\tau) \equiv \rho\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\tau}{2} + \sin \frac{\tau}{2}}{\cos \frac{\tau}{2} - \sin \frac{\tau}{2}}.$$

Integralele $I_{n1}(x)$ și $I_{n2}(x)$ sunt de tipul Laplace și comportarea lor asimptotică poate fi ușor obținută aplicând rezultatele din paragraful 2.3.

În particular, dat fiind că pentru $\tau=0$, $h(\tau)$ capătă valoarea maximală (egală cu zero) și în vecinătatea punctului staționar ($\tau=0$), $h(\tau) \approx \tau^2$, $\cos n\tau \approx 1$, $\sin n\tau \approx 0$, $\rho_1(\tau) \approx 1$, $\rho_1'(\tau) \approx 1$.

Termenii principali în reprezentarea asimptotică a integralelor $I_{n1}(x)$ și $I_{n2}(x)$ au forma

$$I_{n1}(x) \approx \sqrt{\frac{1}{\pi x}}, \quad I_{n2}(x) \approx \sqrt{\frac{1}{\pi x}}, \quad x \gg 1$$

și respectiv

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{1}{\pi x}} \left(\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{n\pi}{4}\right), \quad x \gg 1 \quad (2.5.80)$$

rezultat, care a mai fost obținut prin metoda fazei staționare (vezi (2.4.38)).

Pentru a obține termenii următori în descompunerea asimptotică a funcției $J_n(x)$ este comod de efectuat transformarea de variabile în integralele $I_{n1}(x)$, $I_{n2}(x)$:

$$t = \frac{\sin \tau}{\sqrt{\cos \tau}}.$$

În rezultatul acestui schimb de variabile $\sin \tau = \frac{2t^4}{\sqrt{t^8 + 4t^4 + t^4}}$ și integralele se aduc la forma:

$$I_{ni}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau^2} f_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.81)$$

cu descompunerea asimptotică (2.3.25).