3.1. Atracţia reciprocă a două corpuri

Problema calculării traiectoriilor mişcării corpurilor cereşti, iar cu dezvoltarea cosmonauticii aplicate şi sateliţilor artificiali ai Pămîntului şi altor aparate zburătoare, abordează drept problemă principală problema calculării cu o exactitate foarte mare a forţelor de interacţie gravitaţională a corpurilor. În continuare vom analiza un exemplu de aşa tip de interacţie a două corpuri.

Fie că două corpuri cu masele M_1 şi M_2 ocupă volumele V_1 şi V_2 respectiv. Pentru a calcula forţa de interacţie gravitaţională ale acestor mase vom aplica legea atracţiei universale în conformitate cu care două mase punctiforme dM_1 şi dM_2 se atrag între ele cu forţa

$$d\vec{F}_{12} = \gamma \frac{dM_1 dM_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \ , \tag{3.1.1}$$

unde γ este constanta gravitaţională, $\vec{r}_{12}$ este vectorul cu originea în dM_1 dirijat spre dM_2, avînd valoarea egală cu distanţa dintre aceste mase punctiforme cu modulul r_{12}.

Forţa integrală de atracţie dintre masele M_1 şi M_2 poate fi scrisă

$$\vec{F}_{12} = \gamma \int\limits_{M_1} \int\limits_{M_2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} dM_1 dM_2 \ , \tag{3.1.2}$$

Aşa dar, problema se reduce la calcularea unei integrale sextriple (Integrală multiplă de ordinul şase).

Integrala (3.1.2) poate fi calculată în cazuiri excepţionale şi, ca rezultat, pentru a rezolva problemele concrete sunt aplicate metode numerice. Tot odată calculul nemijlocit al integralelor de aşa tip cere mari eforturi, condiţionate atît de eficacitatea algoritmilor numerici cunoscuţi, cît şi de posibilităţile tehnicii de calcul. Aplicarea metodelor asimptotice pentru analiza acestei probleme permite în multe cazuri de a simplifica esenţial reprezentarea integrală (3.1.2) pentru forţa de interacţie, şi, ca rezultat, de a lichida dificultăţile cu caracter de calcule numerice.

Însăşi posibilitatea de aplicare a metodei asimptotice pentru a rezolva probleme concrete cere evidenţierea în aceste probleme a unui parametru cu valori mici sau mari. În rezultat termenii principali în descompunerea asimptotică sunt obţinuţi prin metode simple.

În problema abordată în mod natural se evidenţiază o clasă de subprobleme, caracterizate prin faptul că corpurile care interacţionează se află la distanţe mari între ele. În acest caz, drept parametru mic serveşte raportul dintre dimensiunile specifice liniare ale maselor de gravitaşie şi distanţa reciprocă dintre ele.

Fie $\vec{R}_1$ şi $\vec{R}_2$ – razele vectoare ale maselor dM_1 şi dM_2 în raport cu originea arbitrară O (Fig. 3.1).

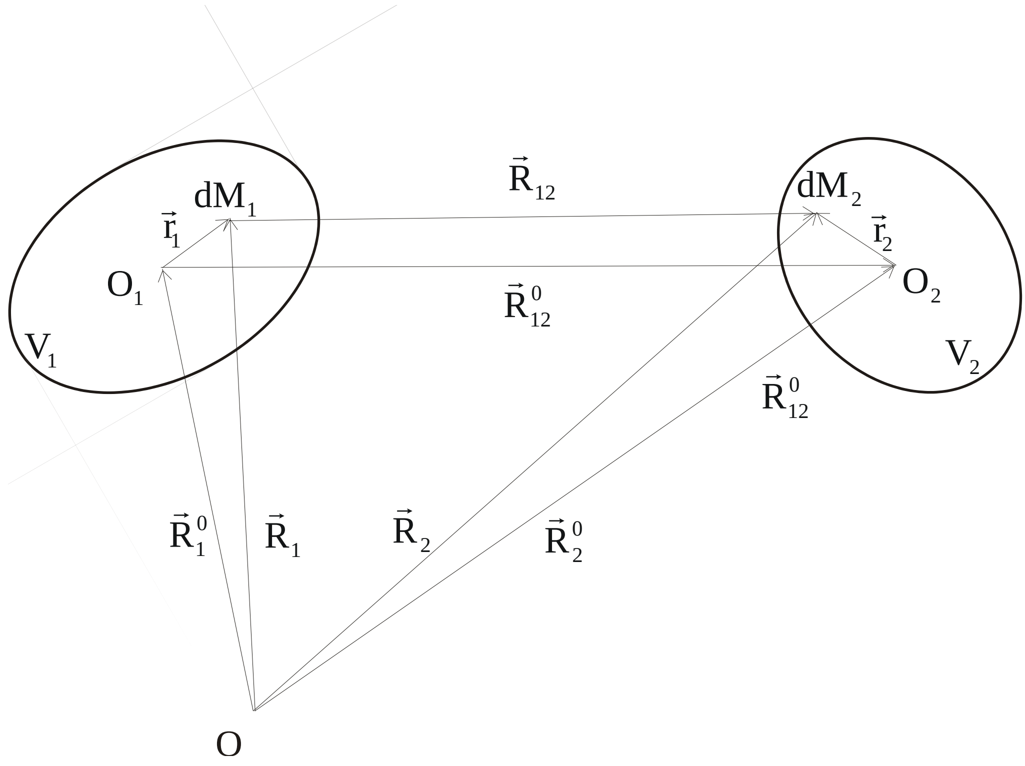

Fig. 3.1.

Vom nota în continuare prin $\rho_1(\vec{R}_1)$ şi $\rho_2(\vec{R}_2)$ densităţile repartiţiei maselor în punctele de plasare a elementelor dM_1 şi dM_2 respective. Atunci $dM_1 = \rho_1(\vec{R}_1)dV_1$, $dM_2 = = \rho_2(\vec{R}_2)dV_2$, unde dV_1 şi dV_2 sunt volumele elementare ocupate de elementele de masă dM_1 şi dM_2 respective. Cu notaţiile introduse, pentru reprezentarea integrală (3.1.2) obţinem:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \int_{V_1}\int_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{R}_1)\rho_2(\vec{R}_2)(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|^3} dV_1 dV_2 \,, \qquad (3.1.3)$$

unde V_1 şi V_2 sunt volumele ocupate de masele M_1 şi M_2.

Pentru comoditate, introducem notaţiile O_1 şi O_2 pentru centrele maselor M_1 şi M_2 şi notăm prin $\vec{R}_1^0$ şi $\vec{R}_2^0$ razele vector ale acestor centre în raport cu punctul O. Vom nota în continuare prin $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ razele vectoare ale elementelor de masă dM_1 şi dM_2 în raport cu centrele maselor O_1 şi O_2 respectiv.

În conformitate cu definiţia centrelor maselor putem scrie [30]:

$$\int_{V_1} \vec{r}_1 \rho_1(\vec{R}_1) dV_1 = 0 \,, \qquad \int_{V2} \vec{r}_2 \rho_2(\vec{R}_2) dV_2 = 0 \,. \qquad (3.1.4)$$

Din Fig. 3.1 avem: $\vec{R}_1 = \vec{R}_1^0 + \vec{r}_1$, $\vec{R}_2 = \vec{R}_2^0 + \vec{r}_2$, iar $\vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}_2^0 - \vec{R}_1^0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{R}_{12}^0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Modulul vectorului $\vec{R}_{12}^0 = \vec{R}_2^0 - \vec{R}_1^0$ coincide cu distanţa dintre centrele maselor O_1 şi O_2 şi este o mărime constantă. Mai putem scrie:

$$R_{12} = \sqrt{\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{R}_{12}^0,\right) + 2\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) + \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)} \; . \tag{3.1.5}$$

În cazul cînd distanţa dintre corpurile care se atrag întrece cu mult dimen-siunile liniare ale acestor corpuri expresia (3.1.3) poate fi esenţial simplificată. În acest caz $\delta = \dfrac{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}{\left|\vec{R}_2 - \vec{R}_1\right|} << 1$ şi expresia (3.1.5) în aproximaţia termenilor liniari după mărimea delta capătă forma:

$$R_{12} \approx R_{12}^0 \left(1 + \frac{\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{R}_{12}^0,\right)}\right), \quad \delta << 1. \tag{3.1.6}$$

Cu aceeaşi exactitate pentru expresia (3.1.3) obţinem:

$$\vec{F}_{12} = \gamma \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{R}_1^0 + \vec{r}_1)\rho_2(\vec{R}_2^0 + \vec{r}_2)}{R_{12}^{0\;3}} \left(\vec{R}_{12}^0 - 3\frac{\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{R_{12}^{0\;2}} \vec{R}_{12}^0 + \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) dV_1 dV_2 \; . \tag{3.1.7}$$

Reprezentăm integrala (3.1.7) sub forma

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{3.1.8}$$

cu notaţiile respective:

$$\vec{F}_{12}^0 = \gamma \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{R}_1^0 + \vec{r}_1)\rho_2(\vec{R}_2^0 + \vec{r}_2)}{R_{12}^{0\;3}} \vec{R}_{12}^0 \, dV_1 dV_2,$$

$$\vec{F}_1 = \gamma \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{R}_1^0 + \vec{r}_1)\rho_2(\vec{R}_2^0 + \vec{r}_2)}{R_{12}^{0\;3}} \left(-3\frac{\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{r}_1\right)}{R_{12}^{0\;2}} \vec{R}_{12}^0 - \vec{r}_1\right) dV_1 dV_2 \; , \tag{3.1.9}$$

$$\vec{F}_2 = \gamma \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{R}_1^0 + \vec{r}_1)\rho_2(\vec{R}_2^0 + \vec{r}_2)}{R_{12}^{0\;3}} \left(-3\frac{\left(\vec{R}_{12}^0, \vec{r}_2\right)}{R_{12}^{0\;2}} \vec{R}_{12}^0 + \vec{r}_2\right) dV_1 dV_2 \; .$$

Dat fiind, că $\vec{R}_{12}^0$ este un vector constant şi poate fi scos de sub semnul integralei, iar $\int_{V_i} \rho_i\left(\vec{R}_i^0 + \vec{r}_i\right) dV_i = M_i$, $(i = 1, 2)$, obţinem pentru $\vec{F}_{12}^0$ expresia:

$$\vec{F}_{12}^0 = \gamma \frac{M_1 M_2}{R_{12}^{0\;3}} \vec{R}_{12}^0. \tag{3.1.10}$$

Pentru a calcula integralele din $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ vom ţine cont de definiţia centrelor maselor (3.1.4), şi obţinem:

$$\vec{F}_1 = 0, \qquad \vec{F}_2 = 0. \tag{3.1.11}$$

Aşa dar, în aproximaţia termenilor proporţionali lui δ^2, forţa de interacţie gravitaţională dintre două corpuri cu masele M_1 şi M_2 poate fi calculată ca forţa de atracţie a două mase punctiforme M_1 şi M_2 concentrate în centrele maselor acestor două corpuri. Aşa, spre exemplu, pentru planetele Pămînt şi Lună, distanţa dintre ele fiind $\approx 3.84 \cdot 10^5$ km, iar raza Pămîntului ≈ 6400 km obţinem $\delta \approx \frac{R_P}{R_{P-L}} \approx 1.7 \cdot 10^{-2}$ şi, în consecinţă, expresia (3.1.10) pentru forţa de interacţie este calculată cu exactitatea $\delta^2 \sim 3 \cdot 10^{-4}$.

Menţionăm că aplicarea parametrului mic din problemă ne-a permis să obţinem expresia pentru forţa de interacţiune gravitaţională a planetelor Pămînt şi Lună fără efectuarea calculelor complicate. Asimptotica obţinută pentru expresia (3.1.10) nu depinde de forma corpurilor.

Este cunoscut, că formula (3.1.10) este exactă pentru cazul de atracţie reciprocă a două bile omogene cu distanţa dintre centre egală cu R_{12}^0. Această împre-jurare poate fi aplicată în calculele mişcării sateliţilor artificiali ai Pămîntului, care se află pe orbite joase. În acest caz satelitul artificial poate fi identificat ca o masă punctiformă, iar integrala sextriplă din expresia (3.1.3) se descompune în două integrale triple, calculate pe volumul Pămîntului. Reprezentarea (3.1.6) pentru distanţa reciprocă dintre Satelit şi elementul de masă ρdV al Pămîntului nu este valabilă, şi pentru calculul forţei de interacţie este necesar de aplicat alte procedee. Unul din aceste procedee constă în introducerea parametrului mic care caracterizează devierile mici dintre Pămînt şi sferă şi reprezentarea forţei de interacţie $\vec{F}_{12}$ sub formă de serie după puterile acestui parametru. Termenul principal din această descom-punere coincide cu (3.1.10), care mai poate fi scris sub forma:

$$\vec{F}_0 = \frac{m\vec{g}}{\left(1 + \frac{h}{R_3}\right)^2}, \tag{3.1.12}$$

unde m este masa Satelitului, g – acceleraţia căderii libere, h – înălţimea plasării satelitului de la Pămînt, R_3 – raza Pămîntului.