3.2. Vibraţiile proprii libere ale unei coarde încărcate

Problema vibraţiilor proprii libere ale unei coarde aparţine mulţimii problemelor clasice ale fizicii matematice. Soluţia ei poate fi găsită în mai multe manuale de fizică matematică. O analiză strictă matematică a acestei probleme şi studierea diferitor aspecte ale problemei vibraţiilor libere ale sistemului cu parametrii distribuiţi poate fi găsită în lucrarea fundamentală [7].

Pentru aplicările practice este foarte important de determinat influienţa diferitor parametri ai sistemului oscilator asupra comportării frecvenţei oscilaţiilor vibraţiilor libere ale acestui sistem.

Problema vibraţiilor libere armonice ale coardei încărcate prezintă cel mai simplu model al unor aşa tipuri de modele oscilante. Această problemă poate fi rezolvată în mod analitic, ce permite de formulat legităţile generale ale comportării frecvenţelor vibraţiilor libere la varierea parametrilor sistemului. La rezolvarea acestor probleme poate fi aplicată şi metoda asimptotică, care permite evaluarea exactităţii soluţiilor în aşa mod.

În continuare este descrisă atît soluţia analitică a problemei vibraţiilor armonice, cît şi analiza ei asimptotică.

Formularea matematică a problemei. Vom examina o coardă de lungimea l din material cu densitatea ρ. Fie că coarda are secţiunea transversală S constantă pe toată lungimea l şi este întinsă cu forţa T. Convenim că capetele coardei sunt fixate. Alegem axa x-lor dea lungul coardei întinse cu originea în capătul din stînga. Admitem că coarda se află într-o stare de repaos. În acest sistem de coordonate capetele coardei au coordonatele $x=0$ şi $x=l$. Fie că încărcătura m este fixată în punctul coardei cu coordonata $x=c$, în aşa fel că $0<c<l$. Notăm prin $w(x,t)$ depla-sarea transversală a coardei în timpul vibraţiilor libere. Această mărime satisface ecuaţia hiperbolică în derivate parţiale de ordinul doi:

$$T\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \rho S(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}. \qquad (3.2.1)$$

În punctele fixate ale coardei deplasarea capetelor în procesul de vibraţii este zero:

$$w(0,t)=0\ , \qquad w(l,t)=0. \qquad (3.2.2)$$

Ecuaţia oscilaţiilor libere (3.2.1) rămîne valabilă şi în cazul coardei cu densitatea $\rho(x)$ şi secţiunea transversală $S(x)$ variabile dea lungul coardei. În cazul studiat prezenţa masei m în punctul $x=c$ al coardei poate fi evidenţiată introducînd funcţia

$$\rho(x)S \equiv \rho S + m\delta(x-c), \qquad (3.2.3)$$

unde $\delta(x)$ este funcţia delta a lui Dirac. ($\delta(x)=0$ pentru $x\neq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$).

Aşa dar, vibraţiile libere ale coardei în intervalele $0<x<c$ şi $c<x<l$ sunt descrise de ecuaţia (3.2.1) cu coeficienţii T,ρ,S constanţi, iar în punctul plasării masei m deplasările transversale ale coardei satisfac aşa numitele condiţii conjugate.

Prima din aceste condiţii reflectă faptul de integritate (continuitate) a coardei şi matematic este reprezentată de condiţia $w^{-}(c,t)=w^{+}(c,t)$, unde indicii $\pm$ notează valorile limită de încovoire: $w^{\pm}(c,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} w(c\pm\varepsilon,t)$, $\varepsilon>0$.

Pentru a evidenţia a doua condiţie de conjugare, vom integra ambele părţi ale ecuaţiei (3.2.1) după variabila x în intervalul $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$. Ţinînd cont de definiţia (3.2.3) şi proprietăţile δ-funcţiei obţinem:

$$T\left(\frac{\partial w(c+\varepsilon,t)}{\partial x}-\frac{\partial w(c-\varepsilon,t)}{\partial x}\right)=\rho S\int\limits_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}dx+m\frac{\partial^2 w(c,t)}{\partial t^2}.$$

Trecînd la limită în ambele părţi ale identităţii obţinute după ε cînd $\varepsilon\to 0$, obţinem condiţia de conjugare solicitată:

$$T\left(\frac{\partial w^{+}(c,t)}{\partial x}-\frac{\partial w^{-}(c,t)}{\partial x}\right)=m\frac{\partial^2 w(c,t)}{\partial t^2}, \tag{3.2.4}$$

care are un sens fizic evident. Relaţia (3.2.4) reprezintă o formă a legii a doua a lui Newton pentru mişcarea încărcăturii m, provocată de acţiunea forţelor de elasticitate şi tensiunea coardei. Proiecţia acestor forţe pe direcţia deplasării coardei se conţine în partea stîngă a expresiei (3.2.4).

Aşa dar, condiţiile conjugate ale deplasării $w(x,t)$ în punctul $x=c$ pot fi scrise sub forma:

$$w^{-}(c,t)=w^{+}(c,t),\quad T\left(\frac{\partial w^{+}(c,t)}{\partial x}-\frac{\partial w^{-}(c,t)}{\partial x}\right)=m\frac{\partial^2 w(c,t)}{\partial t^2}. \tag{3.2.5}$$

Dat fiind că coeficienţii ecuaţiei (3.2.1) ρ,S,T sunt mărimi constante în intervalele $0<x<c$ şi $c<x<l$ este comod de căutat soluţiile acestor ecuaţii separat în fiecare din aceste intervale. Vom nota prin $w^{-}(x,t)$ soluţia ecuaţiei date în intervalul $0<x<c$, iar în intervalul $c<x<l$ – prin $w^{+}(x,t)$. Condiţia că capetele coardei sunt fixate cu aceste notaţii capătă forma $w^{-}(0,t)=0$, $w^{+}(l,t)=0$.

În cazul vibraţiilor armonice libere dependenţa deplasărilor transversale ale coardei de timp poate fi scrisă sub forma:

$$w(x,t)=w^{0}(x)e^{i\Omega t}, \tag{3.2.6}$$

unde $w^0(x)$ este amplitudinea deplasării, Ω – frecvenţa vibraţiilor libere ale coardei (în continuare vom omite indicele „0” al funcţiei $w^0(x)$).

Înlocuind deplasarea $w(x,t)$ din (3.2.6) în ecuaţia vibraţiilor libere, condiţiile la limită şi de conjugare obţinem problema la limită în raport cu amplitudinea funcţiei $w(x)$:

$$Tw_{xx}^{-}(x) = -\rho S\Omega^2 w^{-}(x), \quad 0 < x < c; \qquad Tw_{xx}^{+}(x) = -\rho S\Omega^2 w^{+}(x), \quad c < x < l,$$

$$w^{-}(0) = 0, \; w^{-}(c) = w^{+}(c), \quad T\left(w_x^{+}(c) - w_x^{-}(c)\right) = -m\Omega^2 w(c), \; w^{+}(l) = 0, \qquad (3.2.7)$$

Ecuaţiile diferenţiale, condiţiile la limită şi condiţiile de conjugare (3.2.7) formează un sistem închis de relaţii pentru obţinerea frecvenţelor proprii şi formele corespunzătoare ale vibraţiilor libere pentru coarda încărcată. De rînd cu relaţia (3.2.7) vom mai scrie formularea echivalentă pentru aceeaşi problemă în formă variaţională:

$$\Omega^2 = \min_{w(x)} \frac{0.5T\int_0^l w_x^{\,2} dx}{0.5\rho S\int_0^l w^2 dx + 0.5mw^2(c)}, \quad w(0) = w(l) = 0, \qquad (3.2.8)$$

care va fi în continuare utilizată în multiple cazuri.

Prin calcule nemijlocite ne putem convinge, că relaţiile (3.2.7) reprezintă condiţiile necesare (ecuaţia Euler) ale extremumului ($\delta\Omega^2 = 0$) pentru funcţia Ω^2 (3.2.8). Pentru comoditatea efectuării analizei problemei formulele (3.2.7) şi (3.2.8) le scriem în variabile şi parametri fără dimensiuni:

$$x = lx', \;\; M = \rho Sl, \; \omega^2 = \frac{\rho Sl^2}{T}\Omega^2, \;\; \xi = \frac{c}{l}, \;\; \gamma = \frac{m}{M}. \qquad (3.2.9)$$

Remarcăm că parametrul M reprezintă masa coardei.

Pentru problema la limită (3.2.7) obţinem:

$$w_{xx}^{-}(x) = -\omega^2 w_{xx}^{-}(x), \quad 0 < x < \xi; \qquad w_{xx}^{+}(x) = -\omega^2 w_{xx}^{+}(x), \quad \xi < x < 1,$$

$$w^{-}(0) = 0, \;\; w^{-}(\xi) = w^{+}(\xi), \;\; w_x^{+}(\xi) - w_x^{-}(\xi) = -\gamma\omega^2 w(c), \;\; w^{+}(1) = 0, \qquad (3.2.10)$$

şi principiul variaţional (3.2.8)

$$\omega^2(\gamma) = \min_{w(x)} \frac{0.5\int_0^1 w_x{}^2 dx}{0.5\int_0^1 w^2 dx + 0.5\gamma w^2(c)}, \qquad w(0) = w(1) = 0. \qquad (3.2.11)$$

Frecvenţele proprii şi profilele undelor staţionare pentru o coardă încărcată. Ne vom referi la rezolvarea nemijlocită a problemei la limită (3.2.10). Soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale pentru funcţiile $w^-(x)$ în intervalul $0 < x < \xi$ şi $w^+(x)$ în intervalul $\xi < x < 1$ poate fi căutată sub forma:

$$w^-(x) = C_1^- \sin\omega x + C_2^- \cos\omega x, \quad w^+(x) = C_1^+ \sin\omega(1-x) + C_2^+ \cos\omega(1-x), \qquad (3.2.12)$$

unde $C_1^\pm$ şi $C_2^\pm$ sunt constante arbitrare. Condiţiile la limite $w^-(0) = 0$ şi $w^+(1) = 0$ transformă coeficienţii C_2^+ şi C_2^- în zero şi obţinem reprezentările soluţiilor $w^+(x)$ şi $w^-(x)$ sub forma satisfăcută de condiţia de fixare a capetelor coardei.

$$w^-(x) = C_1^- \sin\omega x, \qquad w^+(x) = C_1^+ \sin\omega(1-x). \qquad (3.2.13)$$

Cerinţele de satisfacere a încovoierilor coardei la fel şi condiţiile conjugatelor încovoierilor în punctul $x = \xi$,

$$w^-(\xi) = w^+(\xi): \quad C_1^- \sin\omega x = C_1^+ \sin\omega(1-x),$$

$$w_x^+(\xi) - w_x^-(\xi) = -\gamma\omega^2 w(c): \quad -\omega\left(C_1^+ \cos\omega(1-\xi) + C_1^- \cos\omega\xi\right) = -\gamma\omega^2 C_1^- \sin\omega\xi, \qquad (3.2.14)$$

conduc la un sistem de două ecuaţii liniare algebrice în raport cu coeficienţii necunoscuţi C_1^+ şi C_1^-. Condiţia de existenţă a soluţiilor netriviale ale acestui sistem este egalitatea cu zero a determinantului lui. Această cerinţă şi serveşte drept condiţie pentru determinarea frecvenţelor proprii ale vibraţiilor libere. În cazul dat condiţia formulată capătă forma:

$$\sin\omega\xi \cos\omega(1-\xi) + \sin\omega(1-\xi)\cos\omega\xi - \gamma\omega \sin\omega(1-\xi)\sin\omega\xi = 0,$$

care este o consecinţă directă din (3.2.14). Ea mai poate fi tramsformată:

$$\cos\omega(1-2\xi) = \cos\omega + \frac{2}{\omega\gamma}\sin\omega. \qquad (3.2.15)$$

Ecuaţia (3.2.15) defineşte dependenţa frecvenţelor vibraţiilor libere ale coardei atît de poziţia punctului de fixare a încărcăturii ξ, cît şi de raportul $\gamma = m/M$. În particular din (3.2.15) urmează că pentru $\xi = 0$ şi $\xi = 1$ frecvenţele vibraţiilor libere se obţin din ecuaţia $\sin\omega=0$ şi coincid cu cele ale coardei fără încărcătură. Aşa dar, încărcătura care se află în punctele fixate ale coardei nu influienţează asupra frecvenţelor vibraţiilor libere (rezultat evident).

Menţionăm că reprezentarea variaţională (3.2.11) a problemei vibraţiilor libere permite formularea unei concluzii generale în privinţa comportării frecvenţelor libere în cazul variaţiei parametrului γ fără a rezolva ecuaţia transcendentă (3.2.15). Într-adevăr, derivînd ambele părţi ale relaţiei (3.2.11) după parametrul γ, obţinem:

$$\frac{d\omega^2(\gamma)}{d\gamma}=-\frac{J_1(w)}{J_2{}^2(w,\gamma)}w^2(\xi)\le 0\,, \tag{3.2.16}$$

unde $J_1(w)=0.5\int_0^1 w_x{}^2dx>0$, $J_2(w,\gamma)=0.5\int_0^1 w^2dx+\gamma w^2(\xi)>0$ şi, prin urmare, semnul egalităţii în (3.2.16) este satisfăcut numai pentru $w(\xi)=0$.

Din (3.2.16) urmează că indiferent de locul plasării încărcăturii, creşterea acestei încărcături (pentru $w(\xi)\ne 0$) duce la micşorarea frecvenţelor vibraţiilor libere ale coardei.

Analiza soluţiilor ecuaţiei neliniare (3.2.15) se simplifică esenţial în cazul plasării încărcăturii în mijlocul barei ($\xi=0.5$). În acest caz concret ecuaţia (3.2.15) capătă forma:

$$\sin^2\frac{\omega}{2}=\frac{2}{\omega\gamma}\sin\omega \tag{3.2.17}$$

şi, ţinînd cont de relaţia $\sin\omega=2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$, ea se descompune în două ecuaţii:

$$\sin\frac{\omega}{2}=0\,, \tag{3.2.18}$$

$$tg\frac{\omega}{2}=\frac{2}{\omega\gamma}\,. \tag{3.2.19}$$

Ecuaţia (3.2.18) determină frecvenţele proprii $\omega_n=2\pi n$, ($n=1,2,\cdots$). Vibraţiile proprii respective se obţin din expresiile (3.2.13)

$$w_n^{\pm}\left(\frac{\omega_n}{2}\right)=w_n^{\pm}(\pi n)=0\,,$$

ceea ce denotă că încărcătura rămîne nemişcată. Cu această condiţie şi ecuaţia a doua din (3.2.14) obţinem relaţia dintre coeficienţii constanţi $C_1^+=-C_1^-$. Aceasta înseamnă că vibraţiile libere ale unei coarde încărcate cu frecvenţele $\omega_n=2\pi n$ au loc lafel ca şi vibraţiile libere ale coardei fără încărcătură cu aceeaşi frecvenţă şi care corespund vibraţiilor $w_n(x) = C_n \sin 2n\pi x$ $(0 \le x \le 1)$. Menţionăm, că profilele undelor acestor vibraţii satisfac condiţia $w_n(x) \equiv -w.(1-x)$, adică sunt impare în raport cu mijlocul coardei $x = 0.5$. Pentru cazul particular studiat cînd încărcătura este plasată în mijlocul coardei, problema spectrală la limită este invariantă în raport cu operaţia de reflecţie $I : x \to 1-x$ şi, prin urmare, frecvenţele proprii ale vibraţiilor libere şi profilele undelor corespunzătoare lor pot fi separate în două clase: în prima clasă vom include vibraţiile proprii pentru care profilele undelor sunt descrise de funcţiile $w(x)$ impare faţă de mijlocul coardei $w^a(x) \equiv -w^a(1-x)$, iar în a doua – cele pare $w^s(x) \equiv w^s(1-x)$. Vibraţiile libere ale coardei cu profile impare, după cum s-a menţionat deja, sunt efectuate cu frecvenţele $\omega_n^a = 2\pi n$, obţinute din soluţia ecuaţiilor (3.2.18), şi atunci, soluţiile ecuaţiei (3.2.19) determină frecvenţele vibraţiilor libere cu profile pare $w^s(x)$.

Analiza asimptotică a dependenţelor $\boldsymbol{\omega(\gamma)}$**.** În continuare vom studia comportarea frecvenţelor vibraţiilor libere ale coardei pentru valori asimptotice ale parametrului γ $(0 \le \gamma << 1,\ \gamma >> 1)$. Dat fiind că vibraţiile cu profiluri impare $w^a(x)$ nu depind de parametrul γ, în continuare vom analiza numai soluţiile ecuaţiei (3.2.19). În particular, pentru $\gamma \to 0$, ce corespunde unei încărcături neglijabil de mică, soluţia acestei ecuaţii la limită determină frecvenţele vibraţiilor libere $\omega_n = (2n+1)\pi$, $n = 0,1,2,\cdots$, care coincid cu frecvenţele vibraţiilor libere ale coardei fără încărcătură, iar profilurile acestor vibraţii sunt descrise de funcţiile $w^s(x)$, pare faţă de $x = 0.5$.

Pentru a obţine dependenţele funcţionale $\omega_n(\gamma)$ vom aplica metodele elaborate în capitolul unu.

Cazul $\boldsymbol{0 \le \gamma << 1}$**.** În calitate de aproximaţie zero a dependenţei $\omega_n(\gamma)$ alegem $\omega_n^0 = (2n+1)\pi$, iar ecuaţia (3.2.19) o scriem în formă echivalentă:

$$\gamma\omega \sin\frac{\omega}{2} - 2\cos\frac{\omega}{2} = 0 . \qquad (3.2.20)$$

Aplicînd metoda Newton obţinem:

$$\omega_n^1(\gamma) \approx \frac{(2n+1)\pi}{1+\gamma}, \qquad 0 \le \gamma << 1, \qquad (3.2.21)$$

în deplină conformitate cu afirmaţia (3.2.16).

La aceeaşi dependenţă $\omega(\gamma)$ (3.2.21) conduc şi calculele efectuate în baza reprezentării variaţionale a frecvenţelor vibraţiilor libere (3.2.11). Dacă alegem în calitate de profiluri proprii ale oscilaţiilor $w_n^s(x) = C_n \sin(2n+1)\pi x$, care corespund profilurilor vibraţiilor libere ale coardei fără încărcătură, şi efectuăm calculul integralelor în (3.2.11) cu aceste funcţii, obţinem dependenţa $\omega(\gamma)$ din (3.2.21).

Cazul $\gamma >> 1$. Pentru valori asimptotice mari ale parametrului $\gamma >> 1$, partea dreaptă a ecuaţiei (3.2.19) tinde spre zero şi valorile la limite a frecvenţelor vibraţiilor libere sunt determinate de soluţiile ecuaţiei:

$$tg\frac{\omega}{2} \approx 0, \quad \gamma >> 1, \tag{3.2.22}$$

de unde obţinem valorile la limite ale frecvenţelor pentru $\gamma \to \infty$

$$\omega_n^0 = \omega_n(\infty) = 2\pi n, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3.2.23}$$

şi, prin urmare,

$$\omega_n(\gamma) \approx 2\pi n, \quad n = 0,1,2,\cdots, \quad \gamma >> 1. \tag{3.2.24}$$

Vom obţine în continuare dependenţele $\omega_n(\gamma)$ pentru valori mari ale lui γ, dar finite. Vom reeşi din valorile la limită ale acestor dependenţe (menţionate mai sus) şi vom remarca că valorile la limită ale frecvenţei fundamentale $\omega_0(\infty)$ este egală cu zero în conforbitate cu (3.2.24) şi, în aşa mod, $\omega_0(\gamma) << 1$ pentru $\gamma >> 1$. Ţinînd cont de relaţia asimptotică $tg\, x \approx x$ pentru $|x| << 1$ din ecuaţia (3.2.19) nemijlocit obţinem dependenţa frecvenţei fundamentale de parametrul γ:

$$\omega_0(\gamma) \approx \frac{2}{\sqrt{\gamma}}, \quad \gamma >> 1. \tag{3.2.25}$$

Dependenţele asimptotice $\omega_n(\gamma)$ pentru frecvenţele superioare ($n = 1, 2, 3, \cdots$) pot fi obţinute aplicînd metoda Newton şi folosind în calitate de aproximaţie iniţială valorile la limită ale frecvenţelor (3.2.23). Din prima iterare în metoda Newton obţinem:

$$\omega_n^1(\gamma) = \omega_n^0 - \frac{f(\omega_n^0, \gamma)}{f'_\omega(\omega_n^0, \gamma)}.$$

Pentru valoarea $\omega_n^0 = 2\pi n$ avem funcţia $f(\omega_n^0, \gamma) = tg\frac{\omega_n^0}{2} - \frac{2}{\omega_n^0 \gamma} = -\frac{1}{n\pi\gamma}$, derivata ei $f'_\omega(\omega_n^0, \gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2\pi^2\gamma}$ şi

$$\omega_n^1(\gamma) \approx 2\pi n + \frac{2}{\pi n \gamma}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad \gamma >> 1. \tag{3.2.26}$$

În rezultatul analizei calitative şi asimptotice efectuate în problema vibraţiilor armonice libere ale coardei încărcate facem concluzia că cu creşterea încărcăturii toate frecvenţele vibraţiilor proprii descresc monoton. În cazul amplasării încărcăturii în mijlocul coardei profilurile vibraţiilor libere se clasifică după caracterul parităţii, astfel că pentru oscilaţiile după profilurile impare încărcătura rămîne în procesul vibraţiilor nemişcată şi, prin urmare, frecvenţele acestor vibraţii nu depind de mărimea încărcăturii. Frecvenţele proprii ale vibraţiilor după profilurile pare descresc monoton de la valorile $\omega_n(0) = (2n+1)\pi$ ($n = 0,1,2,\cdots$), pentru $\gamma = 0$, pînă la valorile $\omega_n(\infty) = 2n\pi$ ($n = 0,1,2,\cdots$) şi, prin urmare, varierea tuturor frecvenţelor la varierea parametrului γ de la valoarea $\gamma = 0$ pînă la $\gamma = \infty$ au loc în intervalul

$$\Delta\omega_n = \omega_n(0) - \omega_n(\infty) = \pi, \quad n = 0,1,2,\cdots . \tag{3.2.27}$$

Caracterul comportării dependenţelor $\omega_n(\gamma)$ în vecinătăţile valorilor la limite $\gamma = 0$ şi $\gamma = \infty$ este descris de formulele asimptotice (3.2.21), (3.2.25) şi (3.2.26).

În încheiere vom demonstra că comportarea asimptotică (3.2.25) a frecvenţei fundamentale a vibraţiilor pentru $\gamma >> 1$ poate fi obţinută şi din raţionamente simple fizice. Pentru prima dată acest procedeu a fost pe larg aplicat de Relay la rezolvarea mai multor probleme despre vibraţiile libere ale mediilor continui .

Mai întîi, utilizînd definiţiile mărimilor fără dimensiuni (3.2.9) vom scrie dependenţa (3.2.25) în mărimi cu dimensiuni:

$$\Omega_0 = 2\sqrt{\frac{T}{ml}} . \qquad (3.2.28).$$

Menţionăm că în expresia lui Ω_0 lipsesc caracteristicile de masă ale barei şi, ca urmare, frecvenţa vibraţiilor libere ale coardei este determinată numai de tensiunea coardei şi masa încărcăturii.

Vom analiza în continuare problema vibraţiilor libere mici ale sistemului mecanic cu un singur grad de libertate şi care reprezintă o masă punctiformă m, aplicată la mijlocul coardei de lungime l întinse cu forţa T (Fig. 3.2.1).

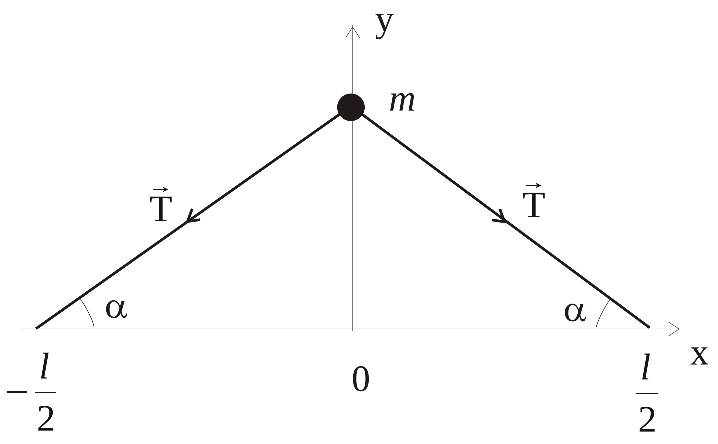

Fig. 3.2.1.

Vibraţia masei m are loc în lungul axei y. Vom calcula frecvenţa Ω_0 a vibraţiilor.

La deplasarea masei m din poziţia de echilibru la distanţa y de la axa orizon-tală apare forţa dirijată în direcţie opusă deplasării (vezi Fig. 3.2.1) şi ca valoare egală cu suma proiecţiilor forţei de tensiune T pe axa y,

$$F = -2T\sin\alpha, \tag{3.2.29}$$

unde α este unghiul de înclinare al coardei faţă de axa x la deplasarea masei m la distanţa y. La deplasări mici $\sin\alpha = tg\alpha$ şi, ca urmare, $\sin\alpha \approx \frac{2y}{l}$, iar expresia (3.2.29) pentru forţa rezultantă capătă forma:

$$F = -\frac{4T}{l}y. \tag{3.2.30}$$

Deci, mişcarea masei m are loc în rezultatul acţiunii forţei, potrivit legii lui Huk $F = -ky$, $k = \frac{4T}{l}$, iar în conformitate cu legea a doua a lui Newton obţinem:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4T}{l}y. \tag{3.2.31}$$

Ecuaţia (3.2.31) descrie oscilaţiile libere armonice ale masei m cu frecvenţa $\Omega = \sqrt{\frac{4T}{ml}}$, care coincide cu expresia (3.2.28).