3.3. Stabilitatea barei comprimabile

Acest paragraf este consacrat analizei problemei, a cărei soluţie conduce în mod direct la cercetările bifurcaţiei soluţiilor ecuaţiilor neliniare, detaliat studiate în capitolul 1. Soluţiile care apar în rezultatul bifurcaţiilor descriu diferite stări ale sistemelor fizice.

Clasificarea condiţiilor în care este posibilă apariţia stărilor noi prezintă un mare interes atît din punct de vedere practic, cît şi teoretic. Spre exemplu, studierea suprafluidităţii, supraconductibilităţii, tranziţiilor de fază, stărilor energetice ale sistemelor cuantice, vibraţiilor libere, stabilitatea sistemelor mecanice etc. în formulările matematice conduc la analiza bifurcaţiilor soluţiilor ecuaţiilor respective.

L. Euler, pentru prima dată într-o formă matematică strictă a studiat problema a cărei soluţie cerea analiza bifurcaţiilor soluţiilor. În 1744 el a formulat şi a rezolvat problema echilibrului unei bare liniare elastice, comprimată în lungul axei cu forţă dată P. Din soluţia obţinută de Euler urmează, că la varierea forţei de comprimare P în intervalul $(0, P_*)$, bara îşi păstrează forma stabilă dreptliniară. Însă cînd forţa atinge valoarea $P = P_*$ (forţa critică a lui Euler) forma dreptliniară a barei devine instabilă şi apare o nouă formă de echilibru în care bara este încovoiată.

Soluţia obţinută de Euler a avut o mare importanţă aplicativă la proiectarea diferitor edificii şi construcţii elastice.

Anume la rezolvarea acestei probleme pentru prima dată au apărut noţiunile de valori critice ale parametrilor şi a soluţiilor respective, care în continuare au căpătat denumirea de valori proprii, iar, corespunzător lor, funcţiile proprii care au jucat un mare rol în toată fizica contemporană.

În continuare vom da o analiză detaliată a problemei despre stabilitatea unei bare comprimabile. Spre deosebire de studierea originală vom introduce unele simplificări în formularea problemei, care permit simplificarea considerabilă a soluţiei şi, în acelaşi timp, păstrarea particularităţilor calitative ale soluţiilor acestei clase de probleme.

Fie dată bara dreptliniară absolut rigidă (nedeformabilă) de lungimea l, fixată la un capăt prin articulaţie, iar la alt capăt (liber) fiind aplicată o forţă de comprimare P. La capătul fixat prin articulaţie este cuplat un arc cu rigiditatea c, care împedică rotaţia barei în jurul articulaţiei. Fie că în starea nedeformată a arcului bara ocupă poziţia verticală, iar abaterea barei de la poziţia verticală va fi determinată de unghiul α măsurat de la verticală. Forţa de comprimare P în poziţia nedeformată a arcului este dirijată în lungul axei barei. În procesul încărcării direcţia acţiunii forţei P în lungul verticalei rămîne neschimbată.

Încărcarea barei şi deformaţiile ei sunt prezentate în Fig. 3.3.1.

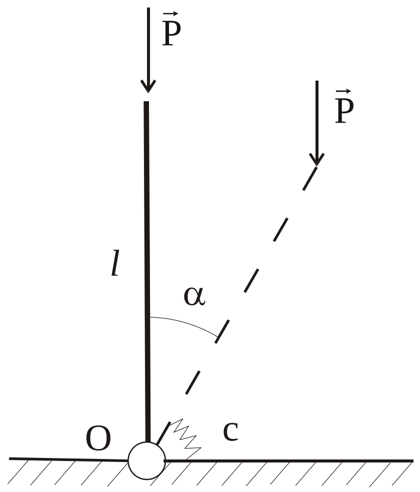

Fig. 3.3.1.

Vom analiza condiţiile necesare pentru ca sistemul mecanic studiat să se afle în echilibru şi stabilitatea acestor stări de echilibru. Mai întîi vom menţiona că starea sistemului studiat este complectamente determinată de valoarea unghiului α, care poate fi socotit drept variabilă independentă a problemei. Deci sistemul studiat posedă un singur grad de libertate. Convenim că energia arcului în starea nedeformată este zero. Fie că bara a fost abătută de la verticală la unghiul α. Atunci, arcul comprimat capătă energia de deformare $U = \frac{c\alpha^2}{2}$, iar la rotirea barei la unghiul α este efectuat lucrul $A = Pl(1-\cos\alpha)$. Energia potenţială totală este suma energiei U de deformare a arcului şi lucrul A luat cu semn opus:

$$\Pi(\alpha) = \frac{c\alpha^2}{2} - Pl(1-\cos\alpha)\,. \tag{3.3.1}$$

În poziţia de echilibru, energia potenţială totală îşi atinge valoarea sa minimală: $\Pi'(\alpha) = 0$, sau, ţinînd cont de (3.3.1)

$$c\alpha = Pl\sin\alpha\,. \tag{3.3.2}$$

Ecuaţia obţinută reprezintă condiţia de echilibru a corpului solid cu axă de rotaţie – egalitatea cu zero a sumei momentelor forţelor care acţionează asupra corpului în raport cu axa de rotaţie.

Introducem parametrul fără dimensiuni

$$\gamma = \frac{Pl}{c} \tag{3.3.3}$$

şi transcriem condiţia de echilibru (3.3.2) sub forma:

$$\alpha - \gamma \sin\alpha = 0 . \qquad (3.3.4)$$

Soluţia ecuaţiei (3.3.4) determină valorile de echilibru ale unghiului α şi dependenţa lor de parametrul de încărcare γ. Pentru analiza acestor dependenţe vom aplica metodele de studiere ale soluţiilor ecuaţiilor neliniare elaborate în capitolul 1.

Mai întîi menţionăm că valoarea $\alpha = 0$ satisface ecuaţia (3.3.4) pentru toate valorile parametrului γ şi, prin urmare, bara se poate afla în poziţia verticală pentru orice forţe de comprimare P. Dar, după cum este bine cunoscut, în poziţia de echilibru stabil energia potenţială a sistemului capătă valoarea minimală, $\Pi''(\alpha) > 0$, sau

$$1 - \gamma \cos\alpha > 0 . \qquad (3.3.5)$$

În poziţia de echilibru cu $\alpha = 0$, condiţia (3.3.5) capătă forma:

$$1 - \gamma > 0 \qquad (3.3.6)$$

şi, prin urmare, pentru valorile $\gamma \in (0,1)$ poziţia verticală a barei comprimate este stabilă, iar pentru $\gamma > 1$ – instabilă. Valoarea parametrului $\gamma_* = 1$ este valoare critică. Pentru această valoare a parametrului de încărcare $\gamma = \gamma_*$ derînd cu starea de echilibru $\alpha = 0$ mai apar şi alte forme de echilibru.

Pentru a determina cantitatea formelor de echilibru care apar, stabilitatea şi dependenţa lor de parametrul γ, vom aplica rezultatele analizei bifurcaţiilor soluţiilor ecuaţiilor neliniare descrise în capitolul I.

În acest scop vom studia funcţia $f(\alpha,\gamma) \equiv \alpha - \gamma \sin\alpha$, iar ecuaţia (3.3.4) ne va servi drept o formă implicită de definire a dependenţei $\alpha = \alpha(\gamma)$, care determină starea de echilibru a barei comprimate în funcţie de parametrul de sarcină γ. Valorile bifurcaţionale ale parametrului $\gamma = \gamma_*$ şi soluţiile corespunzătoare lui $\alpha_* = \alpha(\gamma_*)$ se obţin din sistemul de ecuaţii:

$$f(\alpha,\gamma) = \alpha - \gamma \sin\alpha = 0, \quad f'_\alpha(\alpha,\gamma) = 1 - \gamma \cos\alpha = 0 . \qquad (3.3.7)$$

Din sensul fizic al problemei reese că $0 \le |\alpha| < \pi$, iar valoarea $\alpha = 0$ corespunde poziţiei verticale a barei comprimate, în care arcul este nedeformat. Pentru $|\alpha| = \pi$ bara se află în poziţie verticală, în care arcul este comprimat maximal ($\alpha = \pi$) sau este maximal întins ($\alpha = -\pi$). Dar valoarea $|\alpha| = \pi$ este nereală, dat fiind că aceste valori ale unghiului îi corespund eforturilor infinite γ. Într-adevăr, înlocuind $|\alpha| = \pi - \varepsilon$,

$0 \le \varepsilon << 1$, din condiţia de echilibru (3.3.4) determinăm valoarea asimptotică a parametrului $\gamma \approx \frac{\pi}{\varepsilon} >> 1$.

După excluderea parametrului γ din sistemul de ecuaţii neliniare (3.3.7) obţinem ecuaţia în raport cu valorile bifurcaţionale ale unghiului α_*.

$$tg\alpha_* = \alpha_*, \quad |\alpha| < \pi . \tag{3.3.8}$$

Ecuaţia (3.3.8) în intervalul $-\pi < \alpha < \pi$ posedă o singură rădăcină $\alpha_* = 0$. Conform sistemului (3.3.7) ei îi corespunde valoarea bifurcaţională $\gamma_* = 1$, obţinută mai sus din raţionamente pur fizice.

Vom studia în continuare soluţia ecuaţiei (3.3.4) în vecinătatea valorilor bifurcaţionale $\alpha_* = 0$, $\gamma_* = 1$. Dat fiind că $\alpha_* = 0$, atunci în vecinătatea acestei soluţii $|\alpha| << 1$ şi $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \cdots$. Parametrul γ în vecinătatea valorii $\gamma_* = 1$ poate fi prezentat sub forma $\gamma = 1 + (\gamma - 1)$, $(|\gamma - 1| << 1)$ şi, prin urmare, ecuaţia (3.3.4) în vecinătatea valorilor bifurcaţionale $\alpha_* = 0$, $\gamma_* = 1$ poate fi scrisă în forma:

$$\alpha\left(-(\gamma - 1) + \frac{\alpha^2}{6} + \cdots\right) = 0 . \tag{3.3.9}$$

Această ecuaţie pentru $\gamma > 1$ posedă trei soluţii reale:

$$\alpha_1(\gamma) \equiv 0, \quad \alpha_2(\gamma) = \sqrt{6}\sqrt{\gamma - 1} + \cdots, \quad \alpha_2(\gamma) = -\sqrt{6}\sqrt{\gamma - 1} + \cdots , \tag{3.3.10}$$

iar pentru $\gamma < 1$ – o singură soluţie $\alpha_1(\gamma) \equiv 0$.

Mai sus am constatat, că pentru $0 \le \gamma < 1$ poziţia verticală a barei comprimate este stabilă, iar pentru $\gamma > 1$ – instabilă. Să evidenţiem în continuare stabilitatea stărilor de echilibru ale barei pentru $\alpha(\gamma) \ne 0$ şi $\gamma > 1$. În acest scop calculăm $\Pi''(\alpha) = 1 - \gamma\cos\alpha$ pentru $\gamma > 1$.

$$\Pi''(\alpha) = 1 - \frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad 0 < \alpha < \pi . \tag{3.3.11}$$

Pentru a determina semnul funcţiei $\Pi''(\alpha)$ vom calcula derivata de la expresia $\Pi''(\alpha)$. Obţinem:

$$\left(\Pi''(\alpha)\right)' = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin^2\alpha} > 0$$

şi, prin urmare, $\Pi''(\alpha)$ creşte monoton cu creşterea lui $\alpha \in (0,\pi)$. Dat fiind că $\Pi''(\alpha) > 0$ pentru $0 < \alpha << 1$, urmează $\Pi''(\alpha) > 0$ şi pentru toate valorile lui $\alpha \in (0,\pi)$ şi $\gamma > 1$ stările de echilibru ale barei comprimabile, descrise de soluţiile $\alpha(\gamma) \neq 0$ ale ecuaţiei de echilibru (3.3.4) sunt stabile. Mai menţionăm că dependenţa $\alpha(\gamma)$ este monotonă. Într-adevăr, din (3.3.4) obţinem, că pentru $0 < \alpha < \pi$ şi $\gamma > 1$:

$$\frac{d\alpha(\gamma)}{d\gamma} = \frac{\sin\gamma}{1-\gamma\cos\alpha} > 0, \quad \gamma > 1, \tag{3.3.12}$$

de unde urmează că valoarea unghiului α în starea de echilibru stabil a barei, pentru $\gamma > 1$ creşte monoton cu creşterea parametrului de sarcină γ.

Dependenţa $\alpha = \alpha(\gamma)$ poate fi construită reprezentînd ecuaţia (3.3.4) sub forma:

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \gamma. \tag{3.3.13}$$

Fixînd pasul valorilor α din segmental $(0,\pi)$ şi calculînd partea stîngă a relaţiei (3.3.13) vom determina valorile respective ale parametrului γ. Rezultatele acestor calcule (ţinînd cont de simetria părţii stîngi a ecuaţiei în raport cu operaţia $\alpha \to -\alpha$) sunt prezentate în Fig. 3.3.2:

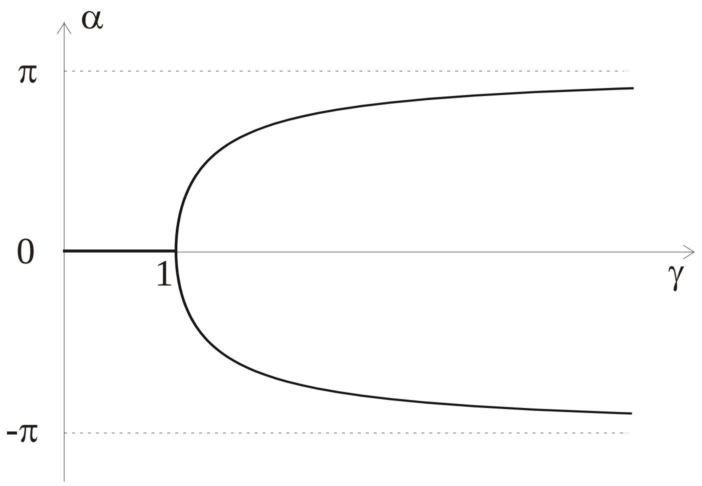

Fig. 3.3.2.

În rezultatul cercetărilor efectuate putem face concluzia despre comportarea barei comprimabile. Cînd variază parametrul γ de la $\gamma = 0$ pînă la $\gamma = 1-\varepsilon$, bara posedă o singură şi stabilă formă de echilibru descrisă de unghiul $\alpha = 0$. În acest interval de încărcătură, la devieri mici ale barei de la valoarea $\alpha = 0$, apar momente care readuc bara în poziţia iniţială verticală. Pentru $\gamma > 1$ starea $\alpha = 0$ este instabilă.

Valoarea parametrului $\gamma_* = 1$ este valoare critică. Momentul de transformare a stării stabile $\alpha = 0$ în cea instabilă se numeşte pierderea stabilităţii barei.

Vom demonstra la finele paragrafului, că procedeul de determinare a forţei critice poate fi simplificat, dacă se studiază numai comportarea barei comprimabile în vecinătatea punctului de bifurcaţie. În acest caz $|\alpha| << 1$ şi ecuaţia de echilibru (3.3.4) poate fi scrisă sub forma:

$$(1-\gamma)\alpha = 0. \tag{3.3.14}$$

Ecuaţia obţinută este omogenă în raport cu α. Ea este satisfăcută de valoarea $\alpha = 0$. Dar, dat fiind că ne preocupă soluţiile $\alpha \neq 0$, atunci transformarea părţii stîngi a ecuaţiei (3.3.14) în zero este posibilă numai pentru valoarea $\gamma = 1$, care şi reprezintă punctual critic de pierdere al stabilităţii.

În multe probleme ale fizicii contemporane cel mai mare interes îl prezintă comportarea sistemului fizic în vecinătatea valorilor bifucaţionale ale parametrilor, ce dă posibilitatea de a lineariza expresiile generale neliniare. Linearizarea consecutivă a tuturor expresiilor neliniare, care descriu probleme concrete, conduc în toate cazurile la ecuaţii omogene dependente de parametru. Soluţiile netriviale ale acestor ecuaţii există numai pentru anumite valori ale acestui parametru, care au căpătat în matematică denumirea de valori proprii, iar soluţiile corespunzătoare acestor valori – funcţii proprii.

Problema studiată încă în a. 1744 de Euler, consacrată stabilităţii barei comprimabile, a fost prima problemă din această clasă, unificată la moment prin denumirea comună de probleme pentru determinarea *valorilor proprii* sau, în termenologia matematicii contemporane, de *probleme spectrale*.