

Anexa 1. Distribuția Gauss

Verificați că pentru o variabilă aleatoare gaussiană

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.1})$$

valoarea medie și dispersia sunt date de μ și σ .

Rezolvare:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (\text{A.2})$$

Se știe că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad (\text{A.3})$$

deci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}. \quad (\text{A.4})$$

Derivând relația anterioară în raport cu parametrul μ obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \mu\sigma\sqrt{2\pi}. \quad (\text{A.6})$$

Rezultă:

$$E(x) = \mu. \quad (\text{A.7})$$

Dispersia este dată de:

$$E\{(x-\mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \quad (\text{A.8})$$

Integrala se rezolvă prin părți notând $u = x - \mu$.

Distribuția Gauss este implimentată în pachetul de programe *Mathematica* ca **NormalDistribution[μ , σ]** din

Statistics`ContinuousDistributions`, care se activează cu **<<Statistics`**. Pentru distribuția cu $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 2$ aplicată la cercetarea mișcării Browniene (vezi Figura 1.1), se obțin rezultatele numerice prezentate pe Figurile A.1 și A.2.

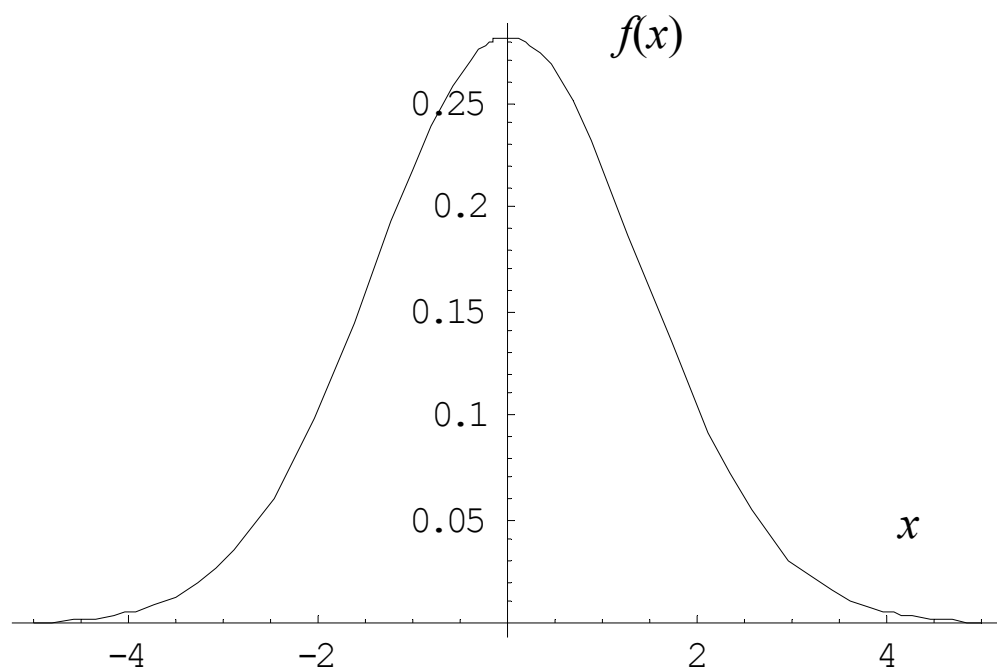


Figura A.1. Funcția densității de probabilitate pentru $\mu=0$ și $\sigma^2=2$.

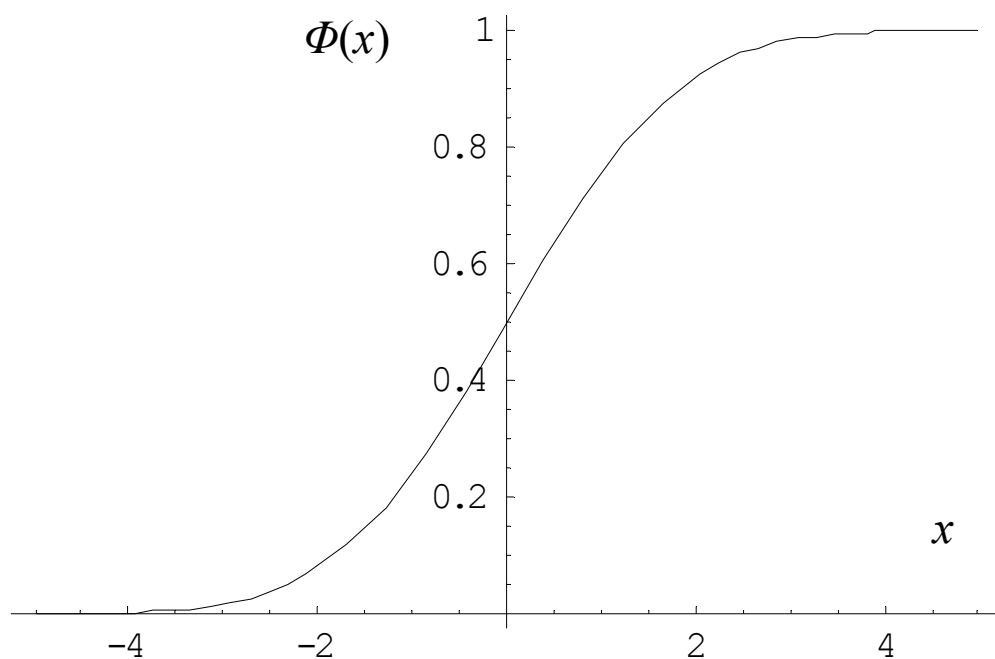


Figura A.2. Funcția cumulativă de distribuție pentru $\mu=0$ și $\sigma^2=2$.

Codul pentru programul *Mathematica* și funcțiile densității de probabilitate și cumulativă de distribuție pentru $\mu=0$ și $\sigma^2=2$:

```
<<Statistics`
mu=0;
sigma=Sqrt[2];
distribution=NormalDistribution[mu,sigma];
Px=PDF[distribution,x]
Dx=CDF[distribution,x]

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$$


$$\frac{1}{2} \left( 1 + \text{Erf}\left[\frac{x}{2}\right] \right)$$

Plot[Px, {x,-5,5} ];
Plot[Dx, {x,-5,5} ];
```

S-au folosit notațiile: $\mathbf{mu}=\mu$, $\mathbf{sigma}=\sigma$, $\mathbf{Px}=f(x)$ și $\mathbf{Dx}=\Phi(x)$.

Anexa 2. Un model meteorologic stocastic

Probabilitățile condițiilor meteorologice cu referință la cele din ziua precedentă pot fi reprezentate cu ajutorul matricei de tranziție:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Astfel în acest model se va considera, că o zi însorită va fi urmată cu probabilitatea de 90% de o altă zi cu soare, iar 50 % sunt șansele ca o zi ploioasă să fie succedată de una la fel. Deci P_{ij} este probabilitatea că dacă ziua de referință este de tipul j , atunci ea va fi urmată de o zi de tipul i . Proprietatea matricei stocastice este respectată: suma probabilităților pe verticală este 1.

Fie că momentul inițial al modelului (ziua 0) corespunde unei zile cu soare:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Pentru ziua următoare se poate prezice:

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

deci șansele ca ziua 1 să fie însorită sunt de 90%.

Pentru următoarea zi:

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = P^2 x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.86 \\ 0.14 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Se poate scrie acum regula generală pentru ziua n :

$$x^{(n)} = Px^{(n-1)} = P^n x^{(0)}. \quad (\text{A.13})$$

Vectorul stării de echilibru este format din probabilitățile pentru toate zilele însorite și cele ploioase, indiferent de starea timpului în ziua inițială:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} \quad (\text{A.14})$$

și converge doar dacă P posedă matricea inversă (există cel puțin un P^n cu toate elementele diferite de zero). Deoarece q reprezintă vectorul stării de echilibru, acesta este independent de condițiile inițiale și rămâne invariabil la acțiunea lui P . Deci q poate fi examinat ca un vector propriu asociat cu valoarea proprie 1, și este obținut pe baza matricei de tranziție P (A.9):

$$Pq = q = Iq,$$

$$(I - P)q = 0,$$

$$(I - P)q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \right] q = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix} q,$$

$$\begin{pmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(A.15)

$$\text{Prin urmare, } q_1 - 5q_2 = 0. \quad (\text{A.16})$$

Ținând cont că $q_1 + q_2 = 1$, obținem:

$$\begin{cases} q_1 - 5q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{5}{6} \approx 0.833 \\ q_2 = \frac{1}{6} \approx 0.167 \end{cases}. \quad (\text{A.17})$$

Prin urmare, starea de echilibru este caracterizată de vectorul:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.833 \\ 0.167 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Deci pe termen de lungă durată peste 83% din zile vor fi cu soare. Precizia acestui pronostic este determinată doar de exactitatea cu care este formată matricea de tranziție, iar un set corespunzător de date cât mai aproape de realitate poate fi ușor obținut în rezultatul sistematizării informației meteorologice.

Anexa 3. Simbolul Pochhammer

$$\text{Simbolul Pochhammer } \theta > 0, \quad \theta^{[n]} \equiv (x)_n \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

$= x(x+1)\dots(x+n-1)$ pentru $n \geq 0$ reprezintă denumirea folosită în teoria funcțiilor speciale pentru factorialul crescător sau ascendent. $\Gamma(\dots)$ este funcția gama. În pachetul de programe *Mathematica* [109] simbolul Pochhammer este implimentat ca **Pochhammer[x, n]**. Pentru primele 5 valori ale lui n obținem:

$$\begin{aligned} (x)_0 &= 1; \\ (x)_1 &= x; \\ (x)_2 &= x^2 + x; \\ (x)_3 &= x^3 + 3x^2 + 2x; \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$(x)_4 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$,
 care sunt reprezentate grafic pe Figura A.3.

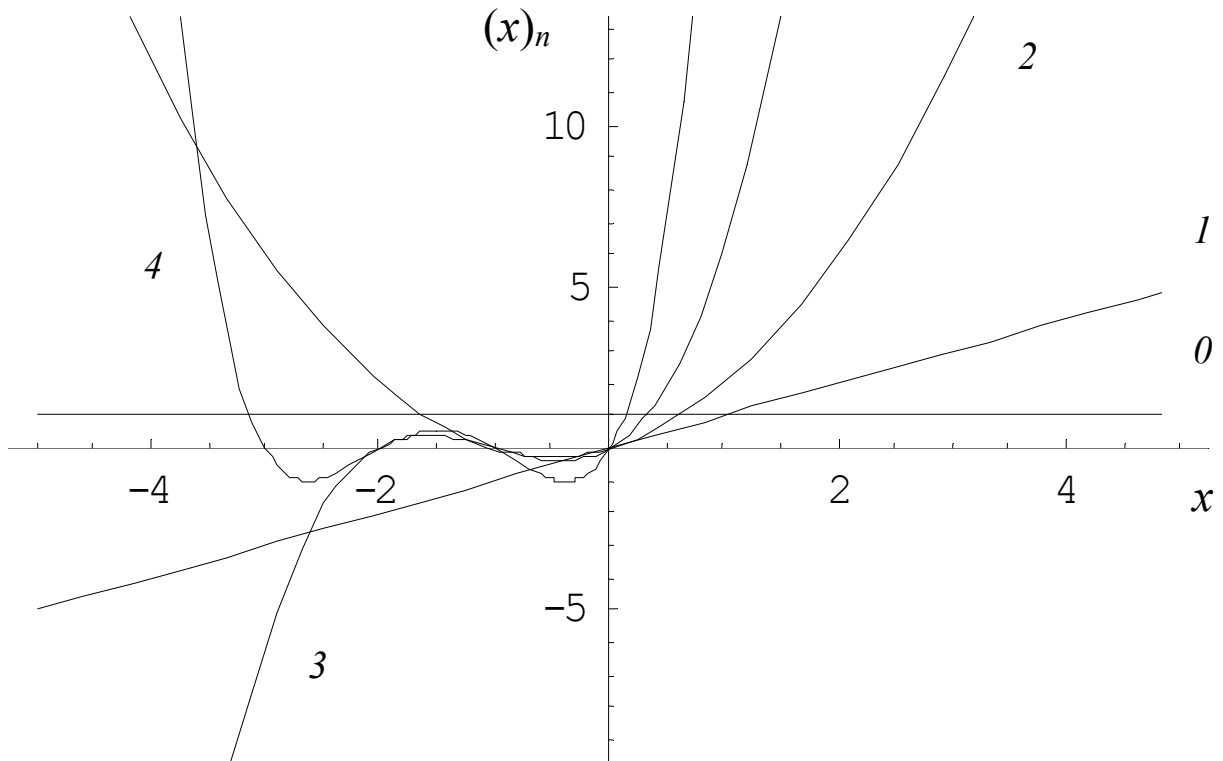


Figura A.3. Reprezentarea grafică a simbolului Pochhammer pentru $n=0\div 4$.

Alte relații importante pentru simbolul Pochhammer:

$$(-x)_n = (-1)^n (x - n + 1)_n,$$

$$(x)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{x}{2}\right)_n \left(\frac{1+x}{2}\right)_n, \quad (x)_{2n+1} = 2^{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)_n \left(\frac{1+x}{2}\right)_n,$$

$$(2x)_n = \begin{cases} 2^n (x)_{n/2} \left(x + \frac{1}{2}\right)_{n/2}, & n = 2, 4, \dots \\ 2^n (x)_{(n+1)/2} \left(x + \frac{1}{2}\right)_{(n-1)/2}, & n = 1, 3, \dots \end{cases}, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{(x)_n}{(x)_m} = \begin{cases} (x+m)_{n-m}, & n \geq m \\ \frac{1}{(x+n)_{m-n}}, & n \leq m \end{cases},$$

$$(1)_n = n!, \quad \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}.$$

Simbolul Pochhammer $(x)_n$ satisface transformarea Euler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} a_n z^n = (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \Delta^n a_0 \left(\frac{z}{1-z}\right)^n, \quad (\text{A.21})$$

unde diferența se exprimă prin coeficientul binomial conform relației:

$$\Delta^n a_0 = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} a_{n-m}. \quad (\text{A.22})$$

Alte relații pentru sumă și produs:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k)_p} = \frac{1}{(p-1)\Gamma(p)} - \frac{n\Gamma(n)}{(p-1)\Gamma(n+p)}; \quad (\text{A.23})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \left(z + \frac{i}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{k+1} (kz)_{k+1}, \quad (\text{A.24})$$

ultima expresie fiind convergentă către zero, către o valoare finită sau diverge în dependență de valoarea lui z .

Anexa 4. Distribuția de echilibru Yule trunchiată

Distribuția de echilibru definită de relația (10.7) este $\pi_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+n)}$, unde $\rho = \frac{1}{1-u}$ și u reprezintă probabilitatea că

un agent va forma un cluster nou, adică probabilitatea de inovație. Astfel pentru valorile $n=1 \div 25$ unități și $u=0.2$ și 0.8 procesul poate fi simplu modelat pe calculator și cercetată dependența implicită a puterii de probabilitatea u (evidentă în cazul dependențelor logaritmice **b** și **d** de mai jos). Rezultatele de calcul corespunzătoare sunt prezentate pe Figura A.4.

Codul pentru programul *Mathematica*:

```
u=0.2; (* sau 0.8 *)  
n=25;  
ro=1/(1-u);  
plot1=Table[{i,Gamma[i]*Gamma[ro+1]/Gamma[ro+i]},{i,1,n}];  
ListPlot[plot1,PlotStyle→PointSize[0.02],Frame→True];  
plot2=Table[{N[Log[i]],Log[(Gamma[i]*Gamma[ro+1])/Gamma[r  
o+i]]},{i,1,n}];  
ListPlot[plot2,PlotStyle→PointSize[0.02],PlotRange→All,Frame  
→True];
```

Putem concluziona, că pentru valori mici ale lui u (deci și ρ) clusterii cresc mai repede decât în cazul unor valori mari ale acestui parametru, când probabilitatea formării clusterilor noi este mai mare și aceasta implică corespunzător o creștere mai lentă a dimensiunii clusterilor deja existenți în sistem însoțită atât de concentrații mici, cât și de o durată de viață medie mai mare.

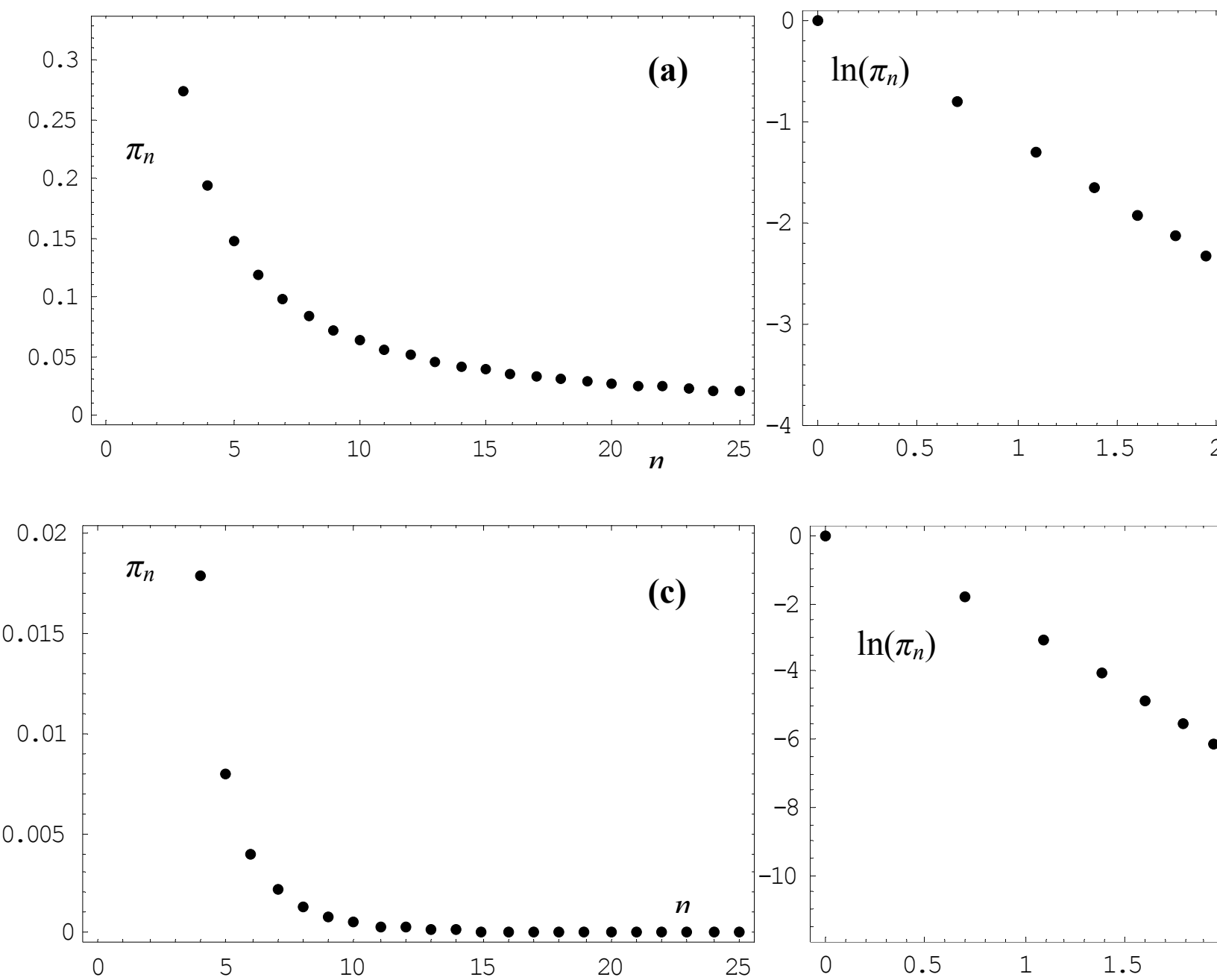


Figura A.4. Distribuția de echilibru pentru $u=0.2$ (a și b) și 0.8 (c și d), $n=1 \div 25$