UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

V.GAMURARI, V.COROPCEANU,
F.PALADI, E.GROSU, V.POPA

# *CULEGERE DE PROBLEME LA BAZELE CALCULUI VECTORIAL ȘI CALCULUI TENSORIAL*

CHIȘINĂU - 1998

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

CATEDRA DE FIZICĂ TEORETICĂ

V.Gamurari, V.Coropceanu,
F.Paladi, E.Grosu, V.Popa

# *CULEGERE DE PROBLEME LA BAZELE CALCULUI VECTORIAL ȘI CALCULUI TENSORIAL*

Aprobat de Consiliul Științific al Facultății de Fizică a Universității de Stat din Moldova

CHIȘINĂU - 1998

CULEGERE DE PROBLEME LA BAZELE CALCULUI VECTORIAL ŞI CALCULUI TENSORIAL/ Autori: V.Gamurari, prof. univ., V.Coropceanu, dr conf., F.Paladi, dr., E.Grosu, V.Popa. - Chişinău, U.S.M., 1998. - 62 p.

Recomandat de Comisia ştiinţifico-metodica a Facultăţii de Fizică

Redactor responsabil V.Enachi, dr.conf

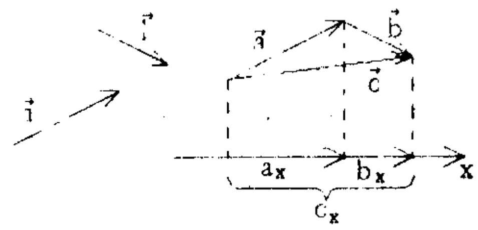
Recenzent D.Cojuhari, dr conf.



# I. SPAŢII VECTORIALE, TRANSFORMAREA BAZELOR ORTOGONALE

1. Demonstraţi că proiecţia vectorului rezultant format dintr-o sumă de vectori pe o axă oarecare este egală cu suma proiecţiilor vectorilor componenţi ai sumei pe aceeaşi axă.

*Rezolvare:*




Conform regulii de compunere a vectorilor, observăm, că vectorul $\vec{c}$ reprezintă suma vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. $a_x$ şi $b_x$ sunt proiecţiile vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ respectiv pe o axă arbitrară $x$. Din figură se observă, că proiecţia vectorului $\vec{c}$ este suma proiecţiilor $a_x$ şi $b_x$:

$$c_x = a_x + b_x$$

Analogic se demonstrează, dacă numărul de vectori ai sumei este mai mare ca doi.

2. Sunt daţi vectorii:

$$\vec{A} = \vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 + 3\vec{i}_3; \quad \vec{B} = 4\vec{i}_1 + 5\vec{i}_2 + 6\vec{i}_3;$$
$$\vec{C} = 3\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3; \quad \vec{D} = 6\vec{i}_1 + 5\vec{i}_2 + 4\vec{i}_3,$$

unde $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ - sunt orţii sistemului de coordonate carteziene ($x_1$, $x_2$, $x_3$).

Calculaţi:

a) suma şi diferenţa vectorilor:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}; \quad \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D};$$
$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}; \quad -\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} + \vec{D};$$

b) unghiurile pe care le formează vectorii $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ cu axele de coordonate;

c) valorile absolute ale vectorilor $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$.

*Rezolvare:*

a) Conform afirmației problemei precedente

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=(1+6+3+4)\vec{i}_1+(2+5+5+2)\vec{i}_2+$$

$$+(3+4+6+1)\vec{i}_3=14\vec{i}_1+14\vec{i}_2+14\vec{i}_3.$$

Analog celelalte cazuri.

b) Pentru a calcula unghiul dintre doi vectori, se formează produsul lor scalar. De exemplu, unghiul dintre vectorul $\vec{A}$ și axa $x_1$:

$$\vec{A}\cdot\vec{i}_1=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{i}_1\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\vec{A}\cdot\vec{i}_1}{\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{i}_1\right|}.$$

Folosind proprietățile bazei ortonormate, vom avea:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{i}_1+2\vec{i}_2+3\vec{i}_3\right)\vec{i}_1}{\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}\cdot\sqrt{\vec{i}_1\cdot\vec{i}_1}}=\frac{1}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{14}};$$

$$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}};\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Celelalte cazuri de sine stătător.

c) Folosind proprietățile bazei ortonormate, vom avea:

$$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{\vec{A}^2}=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{\left(\vec{i}_1+2\vec{i}_2+3\vec{i}_3\right)\left(\vec{i}_1+2\vec{i}_2+3\vec{i}_3\right)}=$$

$$=\sqrt{\vec{i}_1^{\,2}+4\vec{i}_2^{\,2}+9\vec{i}_3^{\,2}}=\sqrt{14}.$$

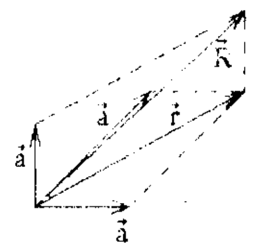
Analog celelalte cazuri.

3. (Borisenko A.I., nr.3, p.42).
Aflați suma a trei vectori cu lungimea $a$ situați pe:
a) muchiile unui cub ce pornesc dintr-un punct;
b) muchiile unei piramide regulate ce pornesc dintr-un punct.



*Rezolvare:*

a)




În figura de mai sus, după regula de compunere a vectorilor, vectorul rezultant este:

$$\vec{R}=\vec{r}+\vec{a}\Rightarrow\vec{R}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}.$$

Modulul lui $\vec{R}$ este:

$$R=\sqrt{\vec{R}^2}\quad\text{sau}\quad R^2=\vec{R}^2;$$

$$\vec{R}^2=\vec{r}^2+\vec{a}^2+2\vec{r}\cdot\vec{a}\Rightarrow R^2=r^2+a^2+2\left|\vec{r}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha,$$

pentru $\alpha=\frac{\pi}{2}$ rezultă $R^2=r^2+a^2$, iar $r^2=a^2+a^2$ sau:

$$r^2=a^2+a^2=2a^2;$$

$$R^2=2a^2+a^2=3a^2;$$

$$\vec{R}=3\vec{a};$$

$$R=\sqrt{3}a.$$

b) De sine stătător.

4. Se cunoaște că raza centrului de masă a $n$ puncte **materiale** se definește ca:

$$\vec{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

unde $m_i$ - masele punctelor materiale, $\vec{r}_i$ - razele vectoare, $n$ - numărul de puncte. Aflați:

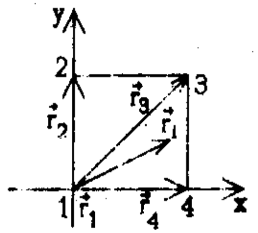
a) centrul de masă al sistemului de puncte materiale, situate în vârfurile pătratului (lungimea laturii - $a$) cu masele 1, 2, 3, 4 kg;

b) centrul de masă al sistemului de puncte materiale, situate în vârfurile unui triunghi echilateral (lungimea laturii - $a$), cu masele 1, 2, 3 g;

c) centrul de masă al sistemului de puncte materiale, situate în vârfurile unui cub (lungimea laturii - $a$), cu masele 1, 2, 3, 4 kg (baza de jos) și 5, 6, 7, 8 kg (baza de sus).

*Rezolvare*:

a) Folosind formula pentru raza vectoare a centrului de masă, obținem:




$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Alegând sistemul de coordonate la fig.1, avem: $\vec{r}_1 = \vec{0}$; $\vec{r}_2 = a \cdot \vec{j}$; $\vec{r}_3 = a \cdot \vec{i} + a \cdot \vec{j}$; $\vec{r}_4 = a \cdot \vec{i}$.

Deci:

$$\vec{r}_c = \frac{2a \cdot \vec{j} + 3a \cdot \left(\vec{i} + \vec{j}\right) + 4a \cdot \vec{i}}{1+2+3+4} = \frac{7}{10}\vec{i} + \frac{5}{10}\vec{j},$$

b și c de sine stătător.



5. Într-un paralelogram unghiul ascuțit este egal cu $\frac{\pi}{8x}$, laturile lui - cu 3 și 5 m. Reprezentând laturile sub formă de vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$, calculați

a) vectorii $\vec{a} + \vec{b}$ și $\vec{a} - \vec{b}$ (de construit);

b) suprafața paralelogramului;

c) proiecția fiecărei laturi a paralelogramului pe direcția celeilalte.

*Rezolvare* (de sine stătător).

6. Pentru vectorii din problema 2 definiți:

a) produsul scalar al sumei primilor doi vectori cu suma celorlalți doi;

b) unghiurile pe care le formează vectorul $\vec{A}$ cu vectorii $\vec{B}$, $\vec{C}$ și $\vec{D}$;

c) proiecția vectorului $\vec{A}$ pe direcțiile vectorilor $\vec{B}$, $\vec{C}$ și $\vec{D}$;

d) produsele vectoriale $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$, $\vec{B} \times \vec{C}$ și unghiurile pe care le formează cu vectorul $\vec{D}$;

e) suprafața paralelogramelor, construite pe $\vec{A}$ și $\vec{B}$, $\vec{C}$ și $\vec{D}$, aflați lungimile diagonalelor acestor paralelograme.

*Rezolvare*:

a) Notăm:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{k}_1,$$
$$\vec{C} + \vec{D} = \vec{k}_2$$

După cum se cunoaște, coordonatele unui vector sumă, format din mai mulți vectori, sunt egale cu suma coordonatelor vectorilor componenți. Deci:

$$\vec{k}_1 = 5\vec{i}_1 + 7\vec{i}_2 + 9\vec{i}_3;$$
$$\vec{k}_2 = 9\vec{i}_1 + 7\vec{i}_2 + 5\vec{i}_3.$$

După definiția produsului scalar,

$$\varphi = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = 5 \cdot 9 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 5 = 139.$$

b) Pentru a calcula unghiul dintre doi vectori, se formează produsul lor scalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos(\vec{A} \hat{\cdot} \vec{B}),$$

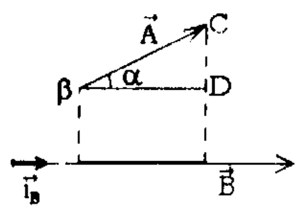
de unde

$$cos(\vec{A} \hat{\cdot} \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}} =$$

$$= \frac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} = \frac{32}{\sqrt{14 \cdot 77}}.$$

Celelalte - de sine stătător.

c) După cum se vede din fig.1 putem scrie: $BD = BC \cdot \cos\alpha$, ceea ce reprezintă modulul proiecției vectorului $\vec{A}$ pe direcția vectorului $\vec{B}$.




sau: $BD \cdot \vec{i}_B = \vec{A}_B$,

unde $\vec{i}_B$ - versorul vectorului $\vec{B}$,

$\vec{A}_B$ - proiecția vectorului $\vec{A}$ pe $\vec{B}$.

Deci putem spune, că:

$$|\vec{A}_B| = \vec{A} \cdot \vec{i}_B = |\vec{A}| \cdot |\vec{i}_B| \cdot cos(\vec{A} \hat{\cdot} \vec{i}_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{A}_B| = |\vec{A}| \cos\alpha;$$



$$|\vec{A}_B| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \frac{32}{\sqrt{1078}}.$$

Celelalte cazuri de sine stătător.

d) Din teoria expusă anterior, avem:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \vec{i}_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \vec{i}_2(A_3B_1 - A_1B_3) +$$

$$+ \vec{i}_3(A_1B_2 - A_2B_1) = \vec{i}_1(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) + \vec{i}_2(3 \cdot 4 - 1 \cdot 6) + \vec{i}_3(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) =$$

$$= -3\vec{i}_1 + 6\vec{i}_2 - 3\vec{i}_3.$$

Celelalte cazuri de sine stătător.

e) Se cunoaște că suprafața paralelogramului construit (pe vectorii $\vec{A}$ și $\vec{B}$) pe doi vectori arbitrari situați într-un plan este egală cu lungimea vectorului $\vec{C}$, care reprezintă produsul vectorial al primilor doi ($\vec{A}$ și $\vec{B}$).

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^3} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54},$$

analog pentru ceilalți doi vectori.

7. [Borisenko, pr.7, p.42].

Demonstrați că vectorii $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ sunt situați într-un singur plan.

*Rezolvare:*

Trei vectori $\vec{A}$, $\vec{B}$ și $\vec{C}$ sunt complanari, dacă produsul lor mixt este egal cu zero.

Deci: $$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

S-a stabilit, deci că vectorii $\vec{A}$, $\vec{B}$ şi $\vec{C}$ sunt situaţi într-un plan. Acum dacă vom stabili că şi vectorul $\vec{D}$ se află în planul lor, atunci toţi cei patru vectori se vor afla într-un plan.

$$\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\cdot\vec{D}=\begin{vmatrix}B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\\ D_1 & D_2 & D_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 4\end{vmatrix}=0.$$

c.t.d

8. [Borisenko, pr.8, p.42].

Sunt daţi vectorii:

$\vec{A}=\vec{i}_1+2\vec{i}_2+3\vec{i}_3;\quad \vec{B}=4\vec{i}_1+5\vec{i}_2;\quad \vec{C}=3\vec{i}_1+2\vec{i}_2+\vec{i}_3.$

Ce sistem (de dreapta sau de stânga) formează acesti vectori? Calculaţi:

a) volumul paralelipipedului construit pe acesti trei vectori;

b) suprafata secţiunii diagonale a paralelipipedului ce trece prin vectorul $\vec{A}$.

*Rezolvare:*

a) Din materialul teoretic, după cum se cunoaste, acesti trei vectori formează o bază de dreapta sau de stânga, dacă produsul mixt al acestor trei vectori este mai mare sau mai mic decât zero corespunzător.

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}+$$

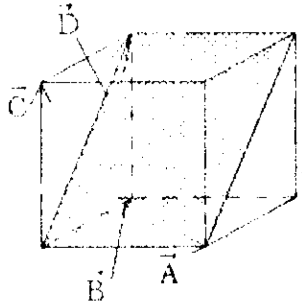
$$+3\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5-8-21=-24<0.$$

Deci vectorii examinaţi formează o bază de stânga

Volumul paralelipipedului construit pe acesti trei vectori nu este altceva decât modulul produsului mixt al lor.

$V=24.$

b)




$\vec{C}+\vec{B}=\vec{D}$, iar,

$S=\left|\vec{A}\times\vec{D}\right|=\left|\vec{F}_r\right|,$

unde, $\vec{F}_r$ este vectorul rezultant ce se obţine ca rezultat al produsului vectorial $\vec{A}$ şi $\vec{D}=\vec{C}+\vec{B}$

$\vec{D}=7\vec{i}_1+7\vec{i}_2+\vec{i}_3;$

$$\vec{A}\times\vec{D}=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 7 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}_1(2-21)-\vec{i}_2(1-21)+\vec{i}_3(7-14)=$$

$$=-19\vec{i}_1+20\vec{i}_2-7\vec{i}_3\Rightarrow S=\left|\vec{A}\times\vec{D}\right|=\sqrt{19^2+20^2+7^2}.$$

9. Demonstraţi că dacă se unesc mijlocurile laturilor unui patrulater arbitrar, atunci figura obţinută va fi un paralelogram.

*Rezolvare* (de sine stătător).

10. Controlaţi dacă următorii vectori ar putea forma o bază şi de care (de dreapta sau de stânga)

a) $\vec{a}_1=2\vec{i}_1+\vec{i}_2-3\vec{i}_3;\quad \vec{a}_2=\vec{i}_1-4\vec{i}_3;\quad \vec{a}_3=4\vec{i}_1+3\vec{i}_2-\vec{i}_3;$

b) $\vec{b}_1=\vec{i}_1-3\vec{i}_2+2\vec{i}_3;\quad \vec{b}_2=2\vec{i}_1-4\vec{i}_2-\vec{i}_3;\quad \vec{b}_3=3\vec{i}_1+2\vec{i}_2-\vec{i}_3;$