X. TEOREMA STOX. CIRCULAȚIA. CÂMP POTENȚIAL

1. Să se calculeze lucrul vectorului $\vec{a} = \vec{r}$ de-a lungul liniei (de spirală) spiralate:

$$\vec{r} = \vec{i}\,a\cos t + \vec{j}\,a\sin t + \vec{k}\,bt \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

*Rezolvare:*

$$A = \int \vec{a}\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\vec{i}\,a\cos t + \vec{j}\,a\sin t + \vec{k}\,bt\right) d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} -a\cos t\,a\sin t\,dt + a\sin t\,a\cos t\,dt + b^2 t\,dt =$$

$$= b^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi^2 b^2.$$

2. Să se calculeze lucrul câmpului:

$$\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (2+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

de-a lungul circumferinței mari a sferei:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

ce unește punctele $M(3,4,0)$ și $N(0,0,5)$.

*Rezolvare* (de sine stătător).

3. Calculați circulația vectorului

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k} \quad (\vec{c} \text{ - const})$$

a) de-a lungul circumferinței $x^2+y^2=1,\ z=1$;

b) de-a lungul circumferinței $(x-2)^2+y^2=1,\ z=0$;

*Rezolvare.*

$$\oint \vec{a}\,d\vec{r} = \iint rot\,\vec{a}\,d\vec{S}; \quad rot\,\vec{a} = 2\vec{k};$$

$$c = \iint_S rot\,\vec{a}\,d\vec{S} = \iint 2\vec{k}\vec{k}\,dS.$$



Vectorul normal al suprafeței $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ va fi vectorul $\vec{k}$.

$$c = 2^3 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = 2\pi.$$

4. Demonstrați că este potențial câmpul dat și calculați potențialul acestui câmp.

$$\vec{a} = yz(2x+y+z)\vec{i} + xz(x+2y+z)\vec{j} + xy(x+y+2z)\vec{k}.$$

*Rezolvare:*

$$rot\,\vec{a} = 0,$$

de sine stătător

$$\varphi = \int \vec{a}\,d\vec{r} = \int yz(2x+y+z)dx + xz(x+2y+z)dy +$$

$$+ xy(x+y+2z)dz = xyz(x+y+z) + c.$$

5. Aflați potențialul câmpului gravitațional

$$\vec{a} = -\frac{m}{r^3}\vec{r},$$

creat de masa $m$, situată în originea coordonatelor

*Rezolvare:*

$$U = \int \vec{a}\,d\vec{r} = -m\int \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{m}{2}\int \frac{d\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{7/2}} = -\frac{m}{2}\left(-2r^{-1}\right) = \frac{m}{r}.$$

6. Calculați lucrul câmpului

$$\vec{A} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$$

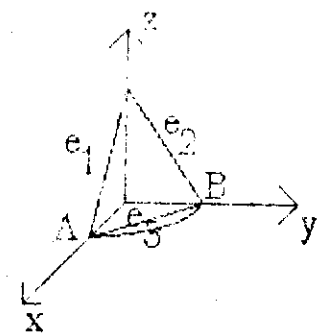
... conturului:

$$x + z = 1; \quad y = 0;$$

$$x^2 + y^2 = 1; \quad z = 0;$$

$$y + z = 1; \quad x = 0$$

Cum se va schimba acest lucru, dacă în loc de semicerc vom avea ... 




$$A_1 = \int \vec{A}d\vec{r} = \int_l xydx + yzdy + xzdz =$$

$$= \int_{l_1} xzdz + \int_{l_2} yzdy + \int_{l_3} xydx =$$

$$= \int_0^1 (1 - z)zdz + \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,xdx + \int_0^1 (1 - y)ydy =$$

$$= \frac{2}{3}, \quad A_2 = \int \vec{A}d\vec{r} = \frac{1}{2}.$$

7. Calculați circulația după o circumferință de raza $R$ a câmpului vectorial: $\vec{A} = \frac{1}{2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$.



8. Demonstrați că câmpul

$$\vec{A} = 3y^4z^2\vec{i} + 4x^3z^2\vec{j} - 3x^2y^2\vec{k}$$

este solenoidal și $B = [\nabla\varphi \times \nabla\psi]$.

*Rezolvare:*

$$\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}[\nabla\varphi \times \nabla\psi] = \mathrm{grad}\psi\,\mathrm{rotgrad}\varphi -$$

$$-\mathrm{grad}\varphi\,\mathrm{rotgrad}\psi$$