

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\text{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z;$$

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi; \vec{e}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi; \vec{e}_z = \vec{k}$$

b) De sine stătător.

XII. FORMULA GREEN

1. Cu ajutorul formulei Green să se transforme următoarea integrală.

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] dy.$$

Rezolvare:

Folosind formula Green:

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = P(x, y);$$

$$y \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right] = Q(x, y);$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = y \left[y + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x \right) \right];$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \left[y + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x \right) \right] = y^2$$

Răspuns:

$$I = \iint_S y^2 dx dy.$$

2. Folosind formula Green, calculați următoarea integrală curbilinie:

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx,$$

4. C reprezintă conurul $x^2 + y^2 = a^2$.
Rezolvare:

$$I = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_S (y^2 + x^2) dx dy =$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (y^2 + x^2) dy dx.$$

Ținem seama de coordonatele polare:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ dx dy = 2\pi r dr \end{cases}$$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} 2\pi r dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Răspuns: $\frac{\pi a^4}{2}$.

5. Folosind formula Green, calculați următoarea integrală curbilinie:

$$\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy,$$

C reprezintă o elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rezolvare:

Folosind formula Green,

$$\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy = \iint_S (-1-1) dx dy = -2 \iint_S dx dy = -2 \iint_S dS_{x,y};$$

$$S_{el} = \pi ab;$$

4. Folosind formula Green, calculați următoarele integrale:

a) $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy].$

$C \rightarrow$ reprezintă un contur în direcția pozitivă cu raportate suprafețele $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

Răspuns: $-\frac{1}{5}(e^x - 1).$

b) $\oint_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy).$

Răspuns: 0.

CUPRINS

I. Spații vectoriale. Transformarea bazelor ortogonale	3
II. Baza reciprocă	14
III. Tensor metric. Noțiune de tensor. Transformarea componentelor tensoriale. Tensori de rangurile I și II	18
IV. Tensori de rang superior. Algebra tensorilor	24
V. Câmpuri scalare. Gradientul câmpului	31
VI. Câmp vectorial. Divergența și fluxul câmpului	37
VII. Câmp vectorial. Rotorul câmpului	40
VIII. Calculul simbolic al mărimilor diferențiale. Operatorii diferențiali ∇ și Δ	43
IX. Formula Ostrogradski-Gauss	47
X. Teorema Stox. Circulația. Câmp potențial	52
XI. Coordonate curbilinii	56
XII. Formula Green	59

V. Ciurari, V. Coropceanu,
F. Palach, E. Grosu, V. Popa

CULEGERE DE PROBLEME LA BAZELE CALCULUI VECTORIAL ȘI CALCULUI TENSORIAL

Redactor - Antoniaa Dembitchi

Semnat pentru tipar 28.12.93.

Formatul 60x84 1/16.

Coli de tipar 4.0. Comanda 87.

Tirajul 50.

Societate Poligrafică Operativă a U.S.M.
MD2009, Chișinău, str. A. Mateevici, 60.