$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial z};$$

$$\operatorname{grad}U=\left(\frac{\partial U}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial U}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\vec{j}+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z;$$

$$\vec{e}_r=\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi;\ \vec{e}_\varphi=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi,\ \vec{e}_z=\vec{e}_z.$$

b) De sine stătător.

XII. FORMULA GREEN

1. Cu ajutorul formulei Green să se transforme următoarea integrală.

$$I=\oint\limits_C\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy.$$

Rezolvare;
Folosind formula Green:

$$\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy;$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=P(x,y);$$

$$y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]=Q(x,y);$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=y\left[y+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x\right)\right];$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\left[y+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x\right)\right]=y^2$$

Răspuns:

$$I=\iint\limits_S y^2\,dxdy.$$

2. Folosind formula Green, calculați următoarea integrală curbilinie:

$$\oint\limits_C xy^2dy-x^2ydx,$$

C reprezintă conturul $x^2 + y^2 = a^2$

Rezolvare:

$$I = \oint_C -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_S \left(y^2 + x^2\right) dx dy =$$

$$= \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(y^2 + x^2\right) dy \int_0^a dx.$$

Vom trece la coordonatele polare.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ dx dy = 2\pi r dr \end{cases};$$

$$I = \int_0^a r^2 2\pi r dr = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Răspuns: $\frac{\pi a^4}{2}$.

3. Folosind formula Green, calculați următoarea integrală curbilinie:

$$\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy,$$

C reprezintă o elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Rezolvare:

Folosind formula Green,

$$\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy = \iint_S (-1 - 1) dx dy = -2 \iint_S dx dy = -2 \iint_S dS_{el};$$

$$S_{el} = \pi a b.$$

4. Folosind formula Green, calculați următoarele integrale:

a) $\oint_C e^x \left[(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy\right]$.

$C \to$ reprezintă un contur în direcția pozitivă ce mărginește suprafețele $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

Răspuns: $-\frac{1}{5}\left(e^x - 1\right)$.

b) $\oint_{x^2 + y^2 = R^2} e^{-(x^2 - y^2)} \left(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy\right)$.

Răspuns: 0.

CUPRINS

V. Gamurari, V. Coropceanu,
F. Paladii, E. Grosu, V. Popa

CULEGERE DE PROBLEME
LA BAZELE CALCULUI VECTORIAL
ŞI CALCULUI TENSORIAL

Redactor - Antonina Dembiţchi

Semnat pentru tipar 28.12.93.
Formatul 60×84 1/16.
Coli de tipar 4,0. Comanda 87.
Tirajul 50 .

Secţia Poligrafie Operativă a U.S.M.
MD2009. Chişinău, str. A. Mateevici, 60.