II. BAZA RECIPROCĂ

1. Exprimati produsul scalar a doi vectori prin componentele covariante şi contravariante.

Rezolvare:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(A_i\vec{e}^{\,i}\cdot B_k\vec{e}^{\,k}\right)=\left(A^i\vec{e}_i\cdot B^k\vec{e}_k\right)=\left(A^1\vec{e}_1+A^2\vec{e}_2+A^3\vec{e}_3\right)\times$$

$$\times\left(B^1\vec{e}_1+B^2\vec{e}_2+B^3\vec{e}_3\right)=g_{ik}A^iB^k=g^{ik}A_iB_k=A_iB^i=A^iB_i;$$

$$g_{ik}=\vec{e}_i\vec{e}_k;\quad g^{ik}=\vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,k};\quad g_i^k=g_k^i=\delta_i^k=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases};$$

$$\left|\vec{A}\right|=A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}\equiv\sqrt{g_{ik}A^iA^k}=\sqrt{g^{ik}A_iA_k}=\sqrt{A_iA^i}.$$

Unghiul dintre doi vectori poate fi exprimat ca:

$$\cos\left(\vec{A}\,\hat{\cdot}\,\vec{B}\right)=\frac{g_{ik}A^iB^k}{\sqrt{g_{ik}A^iA^k}\sqrt{g^{ik}B_iB_k}}=\frac{A_iB^i}{\sqrt{A_iA^i}\sqrt{B_iB^i}}.$$

2. Exprimaţi produsul vectorial a doi vectori în sistemul de coordonate ascuţitunghic.

Rezolvare:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=A^j\vec{e}_j\times B^i\vec{e}_i=\left(A^1\vec{e}_1+A^2\vec{e}_2+A^3\vec{e}_3\right)\times$$

$$\times\left(B^1\vec{e}_1+B^2\vec{e}_2+B^3\vec{e}_3\right)=A^1B^1\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_1\right)+A^1B^2\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right)+$$

$$+A^1B^3\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_3\right)+A^2B^1\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_1\right)+A^2B^2\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_2\right)+\ldots$$

$$+A^3B^3\left(\vec{e}_3\times\vec{e}_3\right)=\left(A^iB^j-A^jB^i\right)\left(\vec{e}_i\times\vec{e}_j\right).$$

3. Este dată baza:

$$\vec{e}_1=-4\vec{i}_1+2\vec{i}_2;\quad \vec{e}_2=3\vec{i}_1+3\vec{i}_2;\quad \vec{e}_3=2\vec{i}_3;$$

$\vec{i}_1,\ \vec{i}_2,\ \vec{i}_3$ - orţii sistemului dreptunghiular de coordonate. Să se afle componentele covariante şi contravariante ale vectorului ce porneşte din originea coordonatelor şi are extremitate în punctul M(1,1,1).

Rezolvare:

Avem vectorul $\vec{A}=\vec{i}_1+\vec{i}_2+\vec{i}_3$

Pentru a afla componentele contravariante, trebuie să descompunem vectorul $\vec{A}$ în baza principală

$$\vec{A}=A_1\vec{e}^{\,1}+A_2\vec{e}^{\,2}+A_2\vec{e}^{\,2}.$$

Pentru componentele covariante avem la fel descompunerea în baza reciprocă

$$\vec{A}=A^1\vec{e}_1+A^2\vec{e}_2+A^3\vec{e}_3;$$

$$A^i=\left(\vec{A}\cdot\vec{e}^{\,i}\right)=\vec{A}\frac{\vec{e}_j\times\vec{e}_k}{\vec{e}_k\left(\vec{e}_l\times\vec{e}_m\right)}=\vec{A}\frac{\vec{e}_j\times\vec{e}_k}{V};$$

$$A^1=\vec{A}\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{\vec{e}_1\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_3\right)}=\vec{A}\frac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{V};$$

$$V=\begin{vmatrix}-4 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2(-12-6)=-36;$$

$$\vec{A}\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_3\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow A^1=0;$$

$$A^2=\frac{1}{V}\vec{A}\left(\vec{e}_3\times\vec{e}_1\right)=\frac{1}{V}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -4 & 2 & 0\end{vmatrix}=\frac{-2(2+4)}{-36}=-\frac{1}{3};$$

$$A^3 = \frac{1}{V}\vec{A}(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \frac{1}{V}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2};$$

$$\Rightarrow A^1 = 0;\ A^2 = -\frac{1}{3};\ A^3 = -\frac{1}{2}\quad \text{componente contravariante.}$$

Componentele covariante le putem afla, folosind și tensorul metric

a) $A_i = g_{ik}A^k;\quad g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$, sau,

b) folosind metoda anterioară, știind vectorii bazei reciproce (e^1, e^2, e^3):

Rezolvare:

a)

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} -12 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\Rightarrow A_1 = g_{11}A^1 + g_{12}A^2 + g_{13}A^3 = 0 + 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 0 = 2;$$

$$A_2 = g_{21}A^1 + g_{22}A^2 + g_{23}A^3 = 0 + 18\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -6;$$

$$A_3 = g_{31}A^1 + g_{32}A^2 + g_{33}A^3 = -2;$$

$$A_1 = 2;\ A_2 = -6;\ A_3 = -2.$$

b)

$$A_i = \left(\vec{A}\vec{e}_i\right) = \vec{A}\frac{\vec{e}^{\,j} \times \vec{e}^{\,k}}{\vec{e}^{\,k}\left(\vec{e}^{\,l} \times \vec{e}^{\,m}\right)} = \vec{A}\frac{\vec{e}^{\,j} \times \vec{e}^{\,k}}{V'}.$$

De sine stătător.

4. Este dată baza principală:

$$\vec{e}_1 = 4\vec{i}_2 + \vec{i}_3;\quad \vec{e}_2 = -\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + 6\vec{i}_3;\quad \vec{e}_3 = 2\vec{i}_1 + \vec{i}_2 - \vec{i}_3.$$

Aflați vectorii bazei reciproce și tensorii metrici g^{ik} și g_{ik}.

Rezolvare (de sine stătător).

5. Este dată baza:

$$\vec{e}_1 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2;\quad \vec{e}_2 = 3\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 - \vec{i}_3;\quad \vec{e}_3 = 2\vec{i}_2.$$

$\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ - orții sistemului dreptunghiular de coordonate.
Să se afle componentele covariante și contravariante ale vectorului $\vec{B} = \vec{i}_1 - \vec{i}_2 + \vec{i}_3$.

Rezolvare (de sine stătător).

6. Aflați expresia pentru produsul vectorial-scalar prin componentele covariante și contravariante ale vectorului.

Rezolvare (de sine stătător).