IV. TENSORI DE RANG SUPERIOR. ALGEBRA TENSORILOR

1. Dacă A_{ikl} sunt componentele covariante ale unui tensor de rangul trei, iar B^{klmn} componentele contravariante ale unui tensor de rangul patru, demonstrați că mărimile $A'_{ikl}B^{klmn}$ sunt componente mixte ale unui tensor de rangul trei.

Rezolvare:

Folosind legile sau definițiile tensorilor de rang superior la trecerea de la un sistem de coordonate la altul, avem:

$$A'_{ikl} = \alpha^{r}_{i'}\alpha^{s}_{k'}\alpha^{t}_{l'}A_{rst};$$

$$B^{klmn} = \alpha^{k'}_{o}\alpha^{l'}_{f}\alpha^{m'}_{d}\alpha^{n'}_{v}B^{ofdv};$$

$$A'_{ikl}\,B^{klmn} = \alpha^{r}_{i'}\alpha^{s}_{k'}\alpha^{t}_{l'}\alpha^{k'}_{o}\alpha^{l'}_{f}\alpha^{m'}_{d}\alpha^{n'}_{v}A_{rst}B^{ofdv} =$$

$$= A_{rst}B^{stdv}\alpha^{r}_{i'}\alpha^{m'}_{d}\alpha^{n'}_{v};$$

pentru $\alpha^{s}_{k'}\alpha^{t}_{l'}\alpha^{k'}_{o}\alpha^{l'}_{f} = \delta_{so}\delta_{tf}\Big|_{o=s}^{f=t} = 1.$

Observăm că această mărime se transformă la fel ca și componentele tensorului de rangul trei.

$$T'_{ikl} = \alpha^{f}_{i'}\alpha^{n}_{k'}\alpha^{d}_{l'}T_{fnd} \quad (k' \to k),$$

c.t.d. sau l.m.c. (la mintea cocoșului).

2. Sunt date componentele tensorului de rangurile patru și cinci: respectiv $A_{ikl}{}^{m}$ și $B^{fq}d^{ns}$. Demonstrați că mărimea $A_{ikl}{}^{m}B^{fq}d^{ns}$ reprezintă componentele unui tensor de rangul șapte.

Rezolvare (de sine stătător).

3. [Borisenko, nr.1, p.111].

Formați mărimi scalare prin contractarea tensorilor de rangul doi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

Exemplul 1.

A_{ik} - tensor de rangul patru.

$$A_{ik}\Big|_{i=k} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 10.$$

Analog - restul cazurilor.

4. Aflați vectorul ce se obține la înmulțirea tensorului T_{ik} cu vectorul A^{l}, la convoluția primului indice al tensorului cu indicele vectorului și la convoluția indicelui doi al tensorului cu indicele vectorului

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{A} = \vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 + 3\vec{i}_3.$$

Rezolvare:

$T_{ik}A_l = C_{ikl}$. Dacă $i = l$ avem suma după indicele i.

$$C_{iki} = C_{1k1} + C_{2k2} + C_{3k3} = T_{1k}A_1 + T_{2k}A_2 + T_{3k}A_3 = F_k.$$

Se obțin componentele vectorului:

$$F_1 = 10,\ F_2 = 11;\ F_3 = 16;$$

$$\vec{F} = 10\vec{i}_1 + 11\vec{i}_2 + 16\vec{i}_3.$$

Controlați cazurile analogice.

5. Aflați scalarul ce se obține prin înmulțirea tensorului T_{ik} la vectorul $\vec{A}$ și $\vec{B}$ prin convoluția după indicele vectorului $\vec{A}$ și primul indice al tensorului T_{ik}, al doilea indice al tensorului T_{ik}, al doilea indice al vectorului $\vec{B}$, dacă T_{ik}, $\vec{A}$ sunt dați în problema anterioară, iar $\vec{B} = 4\vec{i}_1 + 5\vec{i}_2 + 6\vec{i}_3$.

Rezolvare (de sine stătător).

6. Sunt dați:

$$T_{ik}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\ \vec{A}=\vec{i}_1+2\vec{i}_2+3\vec{i}_3,$$

reprezentați tensorul T_{ik} în formă de sumă a tensorilor simetric S_{ik} și antisimetric K_{ik}.

Aflați:

a) $T_{ik}A_k,\ T_{ik}A_i,\ T_{ik}A_iA_k$;

b) $K_{ik}T_{ik},\ K_{ik}S_{ik},\ K_{ik}A_iA_k$;

c) $T_{ik}\delta_{ik},\ K_{ik}\delta_{ik},\ S_{ik}\delta_{ik}$;

d) $T_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll};\ \left(T_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}\right)A_i;\ \left(T_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}\right)A_iA_k$;

e) Demonstrați că dacă S_{ik} reprezintă tensor simetric, iar K_{ik} - antisimetric, atunci $S_{ik}K_{ik}=0$.

Rezolvare:

d) După definiție

$$S_{ik}=\frac{1}{2}\left(T_{ik}+T_{ki}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&10\\6&10&14\\14&14&18\end{pmatrix};$$

$$K_{ik}=\frac{1}{2}\left(T_{ik}-T_{ki}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&-4\\2&0&-2\\4&2&0\end{pmatrix};$$

$$T_{ik}=S_{ik}+K_{ik}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&10\\6&10&14\\14&14&18\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&-4\\2&0&2\\4&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix};$$

$$T_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}.$$

Vom obține un tensor de rangul doi A^{ik}

$$A^{ik}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot T_{ll}$$

T_{ll} reprezintă un număr

$$A^{ik}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2&3\\4&0&6\\7&8&4\end{pmatrix}.$$

Celelalte cazuri - de sine stătător.

7. Aflați valorile proprii pe axele principale ale tensorilor:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&3&4\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}4&1&2\\1&5&0\\2&0&0\end{pmatrix}.$$

Exemplu de rezolvare:

În primul rând, se formează ecuația caracteristică.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \tag{1}$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda - 1\right) = 0;$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3 - \sqrt{10}; \lambda_3 = 3 + \sqrt{10}. \tag{2}$$

Am calculat valorile proprii ale tensorului. Vom calcula axele lui principale, adică vectorii proprii. Fiecărei valori proprii λ_i îi corespunde un vector propriu A_j $\lambda = \lambda_1$, formăm ecuația:

$$\left(T_{ik} - \lambda_S \delta_{ik}\right) A_k^{(S)} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda_1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda_1)A_1 = 0 \\ (2-\lambda_1)A_2 + 3A_3 = 0. \\ 3A_2 + (4-\lambda_1)A_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Din (3) putem afirma că A_1 poate să primească orice valoare

$$\begin{cases} A_2 + 3A_3 = 0 \\ 3A_2 + 3A_3 = 0 \end{cases} \text{ deci } A_2 = A_3 = 0;$$

$$\vec{A}^{(1)} = A_1 \vec{i}_1.$$

Am aflat axa principală ce-i corespunde valorii λ_1

$$\lambda = \lambda_2;$$

$$\left.\begin{matrix} \left(1-3+\sqrt{10}\right)A_1 = 0 \\ \left(2-3+\sqrt{10}\right)A_2 + 3A_3 = 0 \\ 3A_2 + \left(4-3+\sqrt{10}\right)A_3 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A_1 = 0 \\ A_3 = \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}A_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$3A_2 + \frac{\left(1+\sqrt{10}\right)\left(1-\sqrt{10}\right)}{3}A_2 =$$

$$= 3A_2 + \frac{1-10}{3}A_2 = 0 \cdot A_2 = 0.$$

Deci A_2 poate lua orice valoare, iar pentru:

$$A_3 = \frac{1-\sqrt{10}}{3}A_2.$$

De exemplu $A_2 = 1$, $A_3 = \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$, fiindcă pe noi ne interesează numai direcția

$$\vec{A}^{(2)} = \vec{i}_1 + \frac{1-\sqrt{10}}{3}\vec{i}_2;$$

$$\lambda = \lambda_3;$$

$$\left.\begin{matrix} \left(1-3-\sqrt{10}\right)A_1 = 0 \\ \left(2-3-\sqrt{10}\right)A_2 + 3A_3 = 0 \\ 3A_2 + \left(4-3-\sqrt{10}\right)A_3 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A_1 = 0 \\ A_2 \text{ poate lua orice valoare.} \\ A_3 = \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}A_2 \end{matrix}$$

Deci:

$$A_2 = 1;\ A_3 = \frac{1+\sqrt{10}}{3};$$

$$\vec{A}^{(3)} = \vec{i}_2 + \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)\vec{i}_3.$$

Celelalte cazuri - de sine stătător.

V. CÂMPURI SCALARE. GRADIENTUL CÂMPULUI

1. Aflați mărimea și direcția gradientului câmpului $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ în punctele: a) O(0,0,0); b) A(1,1,1); c) B(2,0,1). În care puncte gradientul câmpului va fi nul?

Rezolvare:

După definiție: $\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k};$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y + 3;\ \frac{\partial U}{\partial y} = 4y + x - 2;\ \frac{\partial U}{\partial z} = 6z - 6,$$

pentru $x = y = z = 0$;

$$\mathrm{grad}U = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k};$$

$$|\mathrm{grad}U| = \sqrt{9+4+36} = 7;$$

$$\mathrm{grad}U = 0 \text{ pentru: } \begin{cases} 2x + y + 3 = 0 & x = -2 \\ 4y + x - 2 = 0 & y = 1 \\ 6z - 6 = 0 & z = 1 \end{cases}.$$

2. Fie $U = xy - z^2$. Calculați mărimea și direcția $\mathrm{grad}U$ în punctul M(-9,12,10). Cu ce va fi egală derivata $\frac{\partial U}{\partial l}$ în direcția bisectoarei unghiului xOz?

Rezolvare:

Analog ca în prima problemă:

$$\mathrm{grad}U\big|_M = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 20\vec{k};$$

$$|\mathrm{grad}U|\big|_M = 25.$$

La fel cosinusurile directoare față de axele de coordonate: