$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

11. Se să reprezinte sub formă de orți câmpul: $\vec{a} = \vec{c} \times \text{grad}\,U$, dacă $U = \text{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ și $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

De sine stătător

1. Demonstrați

a) $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div}\vec{a} + \text{div}\vec{b}$

b) $\text{div}(U\vec{c}) = \vec{c}\,\text{grad}\,U$;

c) $\text{div}(U\vec{a}) = U\text{div}\vec{a} + \vec{a}\,\text{grad}\,U$

Exemplu:

b) $$\text{div}(U\vec{c}) = \frac{\partial}{\partial x}(Uc_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Uc_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Uc_z) = \vec{c}\,\text{grad}\,U.$$

2. Calculați: $\text{div}(\text{grad}\,U)$.

$$\text{div}(\text{grad}\,U) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}U\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right) = \Delta U.$$

3. Aflați $\text{div}[\text{grad}\,f(\vec{r})]$, unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

În ce caz $\text{div}[\text{grad}\,f(\vec{r})] = 0$?

$$\text{div}\left[\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{y}{r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial r}\frac{z}{r}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{r - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{r^2} + \ldots =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{y^2+z^2}{r^3} + \ldots =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{2}{r}.$$

Condiția $\text{div}[\text{grad}\,f(\vec{r})] = 0$ ne conduce la o ecuație diferențială

$$f''(r)+f'(r)\frac{2}{r}=0;\quad f'(r)=y(r);$$

$$y'+\frac{2}{r}y=0;$$

$$y(r)=\frac{1}{r^2}=f'(r);$$

$$f(r)=c_1+\frac{c_2}{r}.$$

4. Calculați: $\operatorname{div}\vec{r}$, $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}$.

5. Calculați: $\operatorname{div} f(\vec{r})\cdot\vec{c}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(r)\cdot\vec{c}\right)=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}c_x+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}c_y+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}c_z=$$

$$=\frac{xc_x+yc_y+zc_z}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}.$$

Analog componentele pentru y și z.

$$\operatorname{div}\left(f(\vec{r})\vec{c}\right)=\frac{\vec{r}\cdot\vec{c}}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}.$$

6. [4429. Demidovici, p.436].

Calculați: $\operatorname{div}\left[f(r)\vec{r}\right]$. În ce caz divergența acestui vector va fi egală cu zero.

De sine stătător

7. Calculați:

a) $\operatorname{div}\left(U\operatorname{grad}U\right)$;

b) $\operatorname{div}\left(U\operatorname{grad}V\right)$

8. Lichidul ce umple spațiul se rotește în jurul axei Oz contrar acelor de ceasornic cu viteza unghiulară constantă ω. Calculați divergența vectorului vitezei $\vec{V}$ și vectorul accelerației $\dot{\omega}$ în punctul $M(x,y,z)$ în momentul dat de timp.

Rezolvare:

Folosind formula Euler

$$\vec{V}=\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\right]; \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{V}=\operatorname{div}\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\right]=0,$$

deoarece divergența de la acest produs vectorial este zero.

Accelerația însă:

$$\vec{\omega}=\left[\vec{\omega}\times\vec{v}\right]=\left[\left[\vec{r}\times\vec{\omega}\right]\times\vec{\omega}\right];$$

$$div\left[\left[\vec{r}\times\vec{\omega}\right]\times\vec{\omega}\right]=-2\omega^2.$$

9. Calculați: $\operatorname{div}\left(\vec{b}(\vec{r}\vec{a})\right)$.