1. Procese stocastice şi aplicații

Modelele cu un număr finit de elemente într-un cadru stocastic sau aleator manifestă proprietăți deosebite care nu sunt caracteristice pentru modelele deterministe [1–12]. În particular, un interes special reprezintă modelarea unor seturi mari, dar finite, de agenți care interacționează, şi studierea evoluției sistemelor complexe şi a fluctuațiilor stocastice corespunzătoare. Deseori procesele sunt declarate de tip Markov, iar dinamica este descrisă de ecuațiile Chapman-Kolmogorov. Soluțiile obținute caracterizează distribuția de echilibru sau staționară a modelului. Fluctuațiile în sistem sunt cercetate ca soluție a ecuației Fokker-Planck, i.e. distribuții de probabilitate pentru fluctuații lângă echilibru. Trebuie de menționat, că ecuațiile descriu evoluția distribuției de probabilitate a stărilor, nu a stării propriu-zise. Astfel dacă stările pot manifesta o comportare anormală pentru valori critice, atunci distribuția de probabilitate – nu. Procesele de tip Markov (*jump Markov pocesses*) sunt procese cu un număr finit de stări care variază continuu cu timpul. Pentru a construi un model stocastic pentru un grup de agenți, în primul rând se va alege un set de variabile în calitate de vector de stare a modelului. Astfel se va putea, în principiu, calcula distribuțiile vectorilor stărilor viitoare în baza celor curente, cel puțin pentru un număr finit de paşi în timp. Acest aspect al modelului este descris de ecuația de bază (*master equation*), care este o ecuație diferențială şi indică cum probabilitatea modelului de a se afla în careva moment de timp într-o anumită stare variază din cauza fluxurilor de probabilitate. Euația de bază este determinată odată cu specificarea setului relevant al ratelor de tranziție pentru stările examinate, fapt ce substituie descrierea la micronivel a modelelor. De exemplu, dacă un agent de tipul *i* intră în sistem, atunci numărul agenților de tipul respectiv creşte cu o unitate. Aceasta poate fi reprezentată ca $\overline{n} \to \overline{n} + \overline{e}_i$, unde $\overline{e}_i$ este un vector cu singur element diferit de zero, 1, care corespunde componentei *i*. Acest eveniment are rata de tranziție $w(\overline{n}, \overline{n} + \overline{e}_i)$ şi, pentru modelele discrete, probabilitatea $\Pr \equiv P(\overline{n}+\overline{e}_i \mid \overline{n})$. Dacă un element de tipul *i*, care aparține unui grup sau cluster de elemente de acelaşi tip, îl va părăsi şi se va asocia la un alt cluster de tipul *j*, atunci aceasta se reprezintă cu $w(\overline{n},\overline{n}+\overline{e}_j-\overline{e}_i)$. Pentru *K* tipuri de agenți vectorul de stare este $\overline{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_K)$. unde n_i este un număr întreg nenegativ care corespunde numărului de elemente de tipul *i*, *i*=1, 2, …, *K*. Astfel vectorul de stare $\overline{n}$ descrie procesele de formare a clusterilor (*clustering*). Numărul total de elemente sau agenți în sistem este $N=\sum_{i=1}^{K} n_i(t)$, iar distribuția poate fi descrisă de raportul $\dfrac{\overline{n}}{N}$.

Un lanț de procese Markov (*Markov chain*), procese stocastice Markoviene discrete în timp, este caracterizat de probabilitățile $p(j,k)\equiv P(X(t+1)=k \mid X(t)=j)$, unde X este variabilă aleatoare. Astfel rata de tranziție din starea *j* în starea *k* se defineşte ca $w(j,k)\cdot\tau = P(X(t+\tau)=k \mid X(t)=j)+o(\tau)$, pentru valori mici pozitive *τ*. Dinamica sistemului este determinată odată cu specificarea ratelor de tranziție dintre stări. Notând prin $w(\overline{n},\overline{n}')$ rata de tranziție a sistemului din starea $\overline{n}$ în $\overline{n}'$, distribuția staționară sau de echilibru satisface relația

$$\pi(\overline{n})\sum_{\overline{n}'} w(\overline{n},\overline{n}') = \sum_{\overline{n}'} \pi(\overline{n}')w(\overline{n}',\overline{n}), \qquad (1.1)$$

unde $\pi(\overline{n})$ este probabilitatea de echilibru a vectorului $\overline{n}$, iar sumarea are loc după toate următoarele stări posibile.

Pentru a se deduce distriuția staționară se face referință la condițiile de echilibru (*detailed-balance conditions*), conform cărora există un set de numere pozitive $\pi(j), j\in\{1,2,\ldots,K\}$, suma cărora este 1, şi care sunt componente ale distribuției de echilibru, astfel încât

$$\pi(j)p(j,k)=\pi(k)p(k,j), \qquad (1.2)$$

pentru orice stare *j* şi $k\in\{1,2,\ldots,K\}$, iar $\sum_j \pi(j)=1$. Pentru ratele de tranziție exestă o relație similară:

$$\pi(j)w(j,k)=\pi(k)w(k,j),\ \forall j,k\in\{1,2,\ldots,K\}. \qquad (1.3)$$

Procesele staționare Markov sunt reversibile numai atunci când condițiile de echilibru se respectă, iar condiția necesară şi suficientă pentru existența reversibilității este condiția ciclică $p(i,j)\cdot p(j,k)\cdot p(k,i)=p(i,k)\cdot p(k,j)\cdot p(j,i)$.

În general, un proces stocastic este procesul descris de o funcție aleatoare cu un domeniu de definiție temporal sau spațial. Un exemplu clasic de proces stocastic simplu este mişcarea Browniană. Există două interpretări ale termenului "mişcare Browniană":

1. Fenomenul fizic care corespunde dinamicii aleatoare a particulelor minuscule aflate intr-un lichid;
2. Modele matematice folosite pentru a descrie astfel de procese aleatoare.

Figura 1.1 reprezintă o simulare pe calculator a mişcării Browniaene pentru 1000 paşi în cazul bidimensional. Originea mişcării coincide cu originea sistemului de coordonate (0, 0) şi componentele (x, y) ale fiecărui pas sunt independente şi distribuite normal (distribuția Gauss, vezi **Anexa 1**) cu valoarea medie μ=0 şi dispersia σ^2=2, iar $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)$. Mişcarea Browniană reprezintă un caz particular al proceselor de difuzie [13]. Pe de altă parte, modelul matematic "brownian" este universal şi poate fi folosit pentru a descrie fenomene de natură diferită, de exemplu fluctuațiile pe piața de capital. Această universalitate a modelului se bazează pe caracterul general al distribuției Gauss. Matematic, mişcarea Browniană reprezintă un proces Wiener în care distribuția de probabilitate a poziției particulei în momentul de timp $t+dt$, considerând că poziția sa în momentul t este p, este distribuția Gauss cu $p+\mu dt$ şi $\sigma^2 dt$. Astfel într-un proces Wiener, dacă, pentru fiecare număr pozitiv t, vom considera că există în momentul de timp t funcția continuă W_t, atunci acesta se va caracteriza de următoarele două condiții:

1. Dacă $0<s<t$, atunci $W_t - W_s \propto N(0,\sigma^2(t-s))$;
2. Dacă $0\le s\le t\le u\le v$, adică aceste două intervale [s, t] şi [u, v] nu se suprapun, atunci $W_t - W_s$ şi $W_v - W_u$ sunt variabile aleatoare independente.

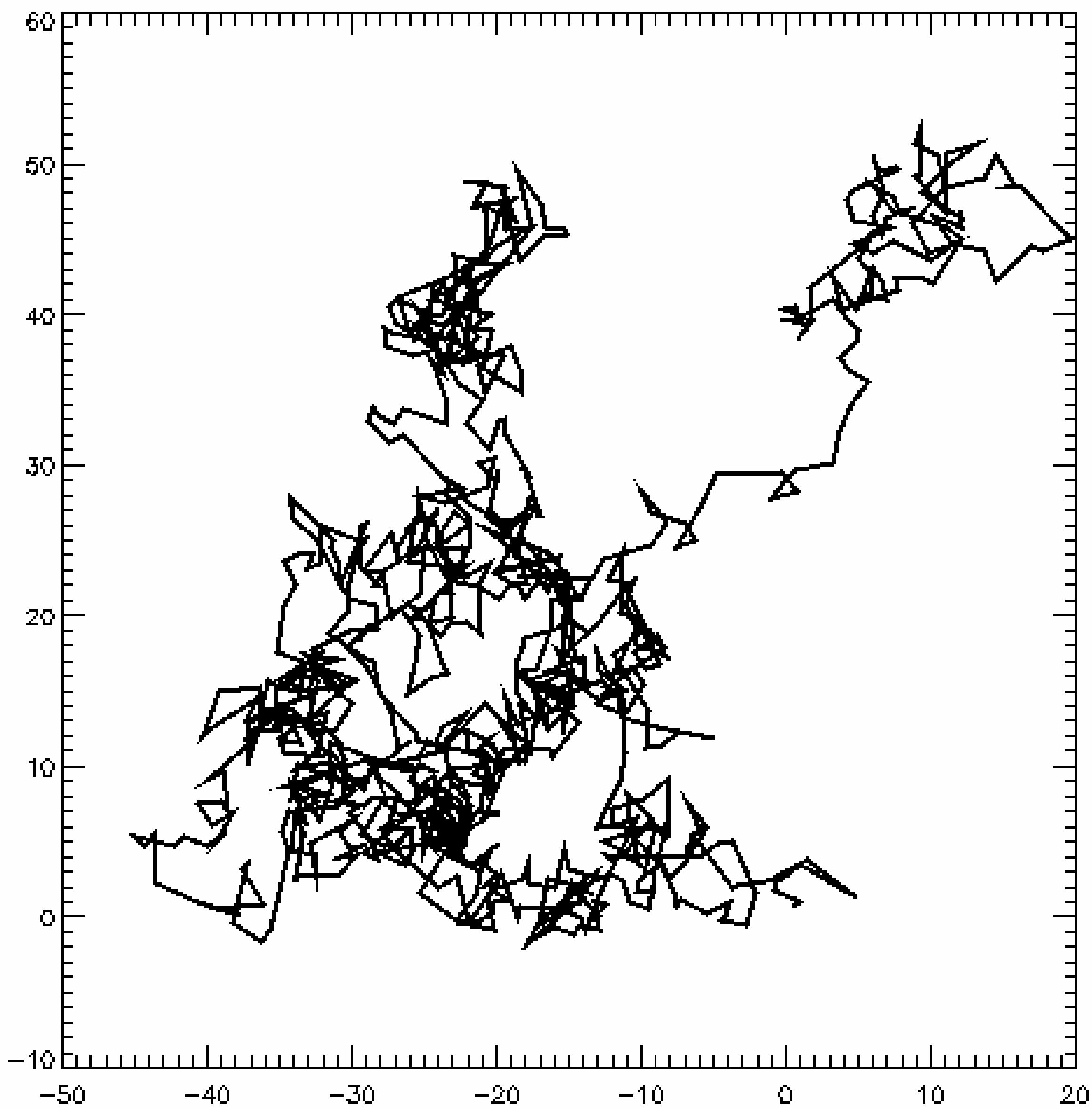

Figura 1.1. Modelarea pe calculator a mişcării Browniene.

În notațiile de mai sus $N(\mu,\sigma^2)$ reprezintă distribuția Gauss.

Aceste caracteristici determină univoc respectarea de către mişcarea Browniană a proprietății Markov: un proces stocastic posedă proprietatea Markov, dacă distribuția de probabilitate a stărilor viitoare ale procesului depind doar de starea curentă, i.e. este independent de stările trecute (*path*-ul procesului). Un proces cu o asemenea proprietate este numit proces Markov sau Markovian. Astfel, dacă $X(t)$, $t>0$, este un proces stocastic, atunci proprietatea Markov presupune că

$$\begin{aligned} &P[X(t+h)=y \mid X(s)=x(s), s \le t] \\ &= P[X(t+h)=y \mid X(t)=x(t)], \forall h>0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Procesele Markov sunt omogene în timp (*time-homogeneous*), dacă

$$\begin{aligned} &P[X(t+h)=y \mid X(t)=x(t)] \\ &= P[X(h)=y \mid X(0)=x(0)], \forall t,h>0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

În caz contrar procesele vor fi considerate neomogene.

În anumite cazuri, procese aparent non-Markoviene ar putea avea reprezentări Markoviene. Astfel, dacă X este non-Markovian, atunci am putea defini un astfel de process Y, fiecare stare a căruia este reprezentată pe un interval de timp al stărilor X, i.e. $Y(t)=\{X(s): s \in [a(t), b(t)]\}$. Dacă Y satisface proprietatea Markov, atunci Y se va numi reprezentarea Markov a lui X, iar X – proces Markov de rangul doi. Procese Markov de rang superior se definesc analogic.

Lanțul de procese Markov, menționat la începutul acestui capitol, de rând cu mişcarea Browniană, reprezintă două exemple renumite de procese Markov. În caz general, un lanț Markov este un şir $X_1, X_2, X_3, \ldots$ de variabile aleatoare. Valoarea lui X_n caracterizează starea procesului în momentul de timp n. Atunci distribuția de probabilitate pentru X_{n+1} este o funcție doar de starea precedentă X_n, adică se respectă egalitatea:

$$P(X_{n+1}=x \mid X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n) = P(X_{n+1}=x \mid X_n), \quad (1.6)$$

unde x este o oarecare stare a procesului.

Primele studii în acest domeniu au fost publicate în anul 1906 de către matematicianul Andrei Markov [14], iar apoi au fost generalizate de către un alt mare matematician rus Andrei Kolmogorov [15].

De o importanță majoră în teoria proceselor stocastice este ecuația Chapman-Kolmogorov menționată mai sus. Fie $\{f_i\}$ este un set de variabile aleatoare care descriu procesul stocastic, iar $p_{i_1,\ldots,i_n}(f_1,\ldots,f_n)$ este funcția densității de probabilitate pentru valorile variabilelor aleatoare $f_1,\ldots,f_n$. În aceste notații ecuația Chapman-Kolmogorov este:

$$p_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(f_1,\ldots,f_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{i_1,\ldots,i_n}(f_1,\ldots,f_n)df_n \,. \qquad (1.7)$$

Pentru un lanț de procese stocastice Markoviene, când $i_1 < \ldots < i_n$, datorită proprietății Markov se poate scrie:

$$p_{i_1,\ldots,i_n}(f_1,\ldots,f_n) = p_{i_1}(f_1)p_{i_2;i_1}(f_2 \mid f_1)\cdots p_{i_n;i_{n-1}}(f_n \mid f_{n-1}), \qquad (1.8)$$

unde $p_{i;j}(f_i \mid f_j)$ este probabilitatea de tranziție dintre $i > j$. Astfel ecuația (1.7) devine:

$$p_{i_3;i_1}(f_3 \mid f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{i_3;i_2}(f_3 \mid f_2)\, p_{i_2;i_1}(f_2 \mid f_1)\, df_2 \,. \qquad (1.9)$$

Dacă X_t este starea procesului în momentul de timp t, atunci, pentru orice două stări i și j, matricea de tranziție este $P_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$.

Proprietățile lanțului de procese Markov sunt descrise în termenii probabilității de tranziție. Astfel, dacă $P(X_{n+1} \mid X_n)$ este probabilitatea de tranziție cu un pas, atunci pentru pașii succesivi se obține:

$$\begin{aligned} P(X_{n+2} \mid X_n) &= \int P(X_{n+2}, X_{n+1} \mid X_n)dX_{n+1} \\ &= \int P(X_{n+2} \mid X_{n+1})P(X_{n+1} \mid X_n)dX_{n+1} \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &P(X_{n+3} \mid X_n) \\ &= \int P(X_{n+3} \mid X_{n+2}) \int P(X_{n+2} \mid X_{n+1})P(X_{n+1} \mid X_n)dX_{n+1}dX_{n+2} \end{aligned},\ldots$$

(1.10)

Ecuațiile (1.10) pot fi generalizate pentru orice moment de timp arbitrar $n+k$, înmulțind probabilitățile de tranziție de k ori şi integrând de k-1 ori. Pentru evoluția cu un pas a distribuției marginale $P(X_n)$, când distribuția inițială este $P(X_0)$, $P(X_{n+1}) = \int P(X_{n+1} \mid X_n)P(X_n)dX_n$. Aceasta este o formă a ecuației Frobenius-Perron. Ar putea exista una sau mai multe distribuții de tipul $\pi(X) = \int P(X \mid Y)\pi(Y)dY$, care se numeşte distribuție staționară sau distribuție de echilibru. Aceasta poate fi considerată ca o funcție proprie a distribuției de probabilitate în asociere cu valoarea proprie 1. Existența sau lipsa distribuției de echilibru sau, dacă ea există, este sau nu această distribuție unică, sunt determinate de proprietățile specifice ale procesului. Astfel distribuția staționară există dacă lanțul Markov este pozitiv recurent, adică atunci când timpul de realizare pentru fiecare stare este finit. Această distribuție este unică, dacă procesul mai este şi ireductibil, ultima proprietate presupunâd că fiecare stare este accesibilă dintr-o orice altă stare. Iar în cazul când distribuția inițială va coincide cu distribuția de echilibru, procesul este şi ergodic. Atunci valoarea medie a unei funcției *f* satisface egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \int f(X)\pi(X)dX\,. \tag{1.11}$$

În cazul unui spațiu discret şi finit, distribuția probabilității de tranziție se va reprezenta sub forma unei matrice a probabilităților de tranziție sau matrice de tranziție, al cărei element (*i*, *j*), de exemplu, este $P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$. Integrarea se va substitui acum cu operația de sumare şi, dacă *P* este matricea de tranziție cu un pas, atunci P^k va fi matricea respectivă la pasul *k*. Distribuția staționară este un vector propriu al matricei de tranziție asociat cu valoarea proprie 1. O matrice de tranziție pozitivă, adică atunci când fiecare element al ei este pozitiv, este ireductibilă şi aperiodică, iar o matrice este stocastică dacă şi numai dacă ea este formată din probabilitățile de tranziție ale unui oarecare lanț Markov. Astfel ansamblul de probabilități corespunzătoare unui anumit moment poate fi reprezentat printr-o matrice, în care numărul elementelor este egal cu numărul stărilor posibile, limitată ca mărime de condiția ca toate componentele sa fie nenegative, iar suma lor egală cu unitatea.

Lanțurile Markov sunt aplicate în diferite domenii: simularea unui buletin meteorologic (vezi **Anexa 2**) şi modelarea duelurilor de foc, codificarea informației şi modelarea proceselor demografice, în bioinformatică şi softuri generatoare de texte-parodii etc. [16]. Multe aplicații practice ale metodelor de optimizare în modelele stocastice sunt în domeniul economico-financiar [17–19]. Vom menționa succint, că un exemplu important în acest sens reprezintă atingerea de către societate a unei stări optime a economiei, asa-numita problemă a alegerii sociale (*the social choice problem*). Astfel sunt cercetate răspunsuri la asemenea întrebări cum ar fi: când starea optimă este realizată şi dacă aceasta este unică, care sunt posibilele "relaxări" ale acestei stări pe termen lung şi în condiţii diferite etc. Modelele şi tehnicile utilizate, metodele computaţionale şi programele de calcul sunt aplicate pentru a cerceta procesele de dezvoltare economice în prezenţa perturbaţiilor stocastice când metodele tradiţionale de echilibru sunt ineficiente. O stare optimă, de regulă, este considerată starea care maximizează bunăstarea (*welfare*) şi utilizarea resurselor. În prezent există un interes sporit referitor la cercetarea fenomenelor dinamice neliniare din domeniul economico-financiar şi elaborarea modelelor teoretice corespunzătoare ca o alternativă a metodelor (semi)empirice respective din statistică, econometrie, micro- şi macroeconomie. Subiectele studiate sunt diferite şi includ fenomenele de echilibru şi dezechilibru, dinamici adaptive neliniare şi complexe, stări de echilibru multiple, fenomene haotice şi bifurcaţii ş.a. cu aplicaţie în mico- şi macrodinamică, analiza financiară, economia internaţională, organizarea industrială, dinamica resurselor şi a mediului ambiant, economia forţei de muncă, demografie ş.a. Mai mult ca atât, modelele matematice care descriu dinamica stocastică a sistemelor complexe sunt folosite şi la modelarea ciclului economic, a dinamicii corespunzătoare a profitului etc [20, 21]. În cazul unei concurenţe perfecte, de exemplu, pentru a se evita apariţia proceselor non-agregative este necesar de a considera un sistem închis de unităţii economice şi financiare, adică un sistem format dintr-un număr constant de structuri economico-financiare, fară fluxuri de intrare sau ieşire de diferită natură, şi care s-ar afla, totodată, într-un echilibru metastabil ce presupune existenţa unor posibilităţi mai optime de redistribuire a banilor şi bunurilor pe piaţă. Această situaţie este analogică realizării în teoria clusterilor a unui minim local al energiei libere Gibbs. O dezvoltare economică stabilă ar presupune, prin urmare, evoluţia sistemului către o asemenea repartizare material-financiară ce ar corespunde unui minim energetic mai adânc sub aspect termodinamic, adică unei stări staţionare a sistemului. Existenţa conexiunilor este asociată cu posibilitatea efectuării unui schimb de informaţie şi luării aceloraşi decizii manageriale. Prin urmare, un cluster economic ar mai putea fi definit ca un grup de agenți care pot face un schimb de informație atât direct, cât şi prin intermediul unor alți agenți intermediari, şi îndeplinesc aceleaşi acțiuni pe piață. Modelarea matematică în domeniul economico-financiar este astăzi un important instrument de cercetare, care presupune şi utilizarea extensivă a tehnicii de calcul în îmbinare cu diverse metode şi modele la cercetarea unor probleme variate. În particular, un şir de lucrări recente au fost consacrate aplicării economico-financiare ale metodelor fizicii statistice, termodinamicii, sinergeticii etc. [22-26], numărul acestor metode şi sfera lor de aplicare fiind într-o permanentă creştere.