10. Modelul Yule-Zipf-Simon

ESF admite o interpretare reuşită a proceselor de formare a clusterilor în termeni de raţional *vs* iraţional, însă datele empirice sunt nesatisfăcător interpretate în cadrul acestui model [40, 41]. Astfel autorii au propus recent [41] un model alternativ care diferă de cel precedent atât în privinţa generării, cât şi a anihilării clusterilor. În particular, probabilitatea de formare a clusterilor este independentă de dimensiune, iar distribuţia de echilibru sau numărul mediu de clusteri cu dimensiunea *i*, este calculată numeric. Soluţia analitică nu poate fi obţinută. Scopul final al acestor investigaţii este obţinerea distribuţiilor corespunzătoare de echilibru în baza unor structuri elementare şi a interacţiunii lor, precum şi argumentarea la nivel microscopic a legităţilor empirice observate în sisteme complexe, i.e. *power law distribution*. Însăşi noţiunea de sctructură elementară este una convenţională, care defineşte, de regulă, agenţi sau firme, iar interacţiunea lor are un caracter aleator, probabilistic. Astfel modelele respective pot fi direct asociate cu modelele computaţionale ABM.

Vom considera în continuare că u şi 1-u sunt necondiţionate de parametrul v, suplimentar la faptul că “alegerea” stării noi a agentului este independentă de starea precedentă a acsetuia. Prin urmare, u devine o caracteristică strict individuală. Dacă vom examina un cluster i care aparţine la o populaţie a cărei dinamică este descrisă în acest cadru, atunci se constată că evoluţia dată nu este o funcţie simplă de i, n-i şi u. Considerând că în sistem există $1 \le k \le n$ clusteri, probabilitatea de dispariţie a unui cluster din set este $w_{i,0} = \dfrac{1}{n}$, iar probabilitatea că aceasta va avea loc este $\dfrac{k}{n} \le 1$. În caz contrar sistemul ramâne în starea iniţială. Concomitent cu dispariţia unui oarecare cluster, clusterul ce-l anexează va creşte corespunzător cu dimensiunea clusterului dispărut. Pentru $n >> 1$ se presupune că nu mai mult de o unitate poate fi anexată la clusterul *i*, probabilitatea de anexare fiind proporțională cu $\frac{i}{v} \cong \frac{i}{n}$, astfel încât aceasta este descrisă de ecuația $w_{i,i+1} \equiv P(i+1 \mid i) = (1-u)\frac{i}{n}$. Totodată, probabilitatea că dimensiunea lui rămâne constantă este $w_{i,i} = 1 - w_{i,0} - w_{i,i+1}$, iar $w_{0,1}$ are semnificația termenului de "regenerare" a clusterului. Matricea de tranziție constituită astfel, $w_{i,i}, i, j = 0, \ldots, n$, este

$$\begin{pmatrix} 1-w_{0,1} & w_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & w_{1,1} & (1-u)\frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & w_{2,2} & (1-u)\frac{2}{n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{n-1,n-1} & (1-u)\frac{n-1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & w_{n,n} \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

Distribuția de probabilitate $P_i, i = 0, \ldots, n$, trebuie să satisfacă ecuațiilor Chapman-Kolmogorov $P_i = \sum_j P_j w_{j,i} \; i = 0, 1, \ldots, n$. Astfel

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0 w_{0,0} + P_1 w_{1,0} + P_2 w_{2,0} + \ldots \\ &= P_0 w_{0,0} + (1-P_0)\frac{1}{n} \equiv P_0 w_{0,0} + (1-P_0)\varphi \end{aligned}, \tag{10.2}$$

$$P_1 = P_0 w_{0,1} + P_1 w_{1,1}. \tag{10.3}$$

Prin urmare, termenul generalizator este

$$P_i = P_{i-1} w_{i-1,i} + P_i w_{i,i}, \text{ deci } P_i(1 - w_{i,i}) = P_{i-1} w_{i-1,i}. \tag{10.4}$$

Substituind valorile, se obține

$$P_i\left(\frac{1}{n}+(1-u)\frac{i}{n}\right)=P_{i-1}\frac{(1-u)(i-1)}{n}, \tag{10.5}$$

iar soluția explicită a lui P_i este

$$P_i=\frac{\theta_{i-1}}{\varphi+\theta_i}\cdots\frac{\theta_1}{\varphi+\theta_2}\frac{\theta_0}{\varphi+\theta_1}\frac{\varphi}{\varphi+\theta_0}, \tag{10.6}$$

unde $\theta_i=w_{i,i+1}$, iar $P_0=\dfrac{\varphi}{\varphi+\theta_0}$ fiind probabilitatea (sau fracțiunea de timp) ce corespunde faptului că starea este neocupată. Prin urmare, distribuția de echilibru invariantă $\pi(\overline{n})\equiv\lim_{t\to\infty}P(\overline{N}_t=\overline{n}\mid\overline{N}_0=\overline{n}'),\forall\overline{n}'$, în acest caz pentru perioada de timp când clusterul există este $\pi_i=P(i\mid i>0)=\dfrac{P_i}{1-P_0}=P_i\dfrac{\varphi+\theta_0}{\theta_0}$. Expresia $\pi_i=\dfrac{\theta_{i-1}}{\varphi+\theta_i}\cdots\dfrac{\theta_1}{\varphi+\theta_2}\dfrac{\varphi}{\varphi+\theta_1}$ nu depinde de termenul de "regenerare" θ_0. De notat că $\dfrac{\theta_{i-1}}{\varphi+\theta_i}=\dfrac{\frac{i-1}{n\rho}}{\frac{1}{n}+\frac{i}{n\rho}}=\dfrac{i-1}{\rho+i}$, unde $\rho\equiv\dfrac{1}{1-u}$. Astfel $\pi_1=\dfrac{1}{1+(1-u)}=\dfrac{\rho}{\rho+1}$, $\pi_2=\dfrac{\rho}{\rho+1}\dfrac{1}{\rho+2}$, $\pi_3=\dfrac{\rho}{\rho+1}\dfrac{1}{\rho+2}\dfrac{2}{\rho+3}$, … şi termenul generalizator $\pi_i=\rho\dfrac{\Gamma(i)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+i+1)},i=1,\ldots,n-1$, reprezintă exact valoarea distribuției Yule cu excepția ultimului termen, care este diferit de $\dfrac{n-1}{\rho+n}\pi_{n-1}$, deoarece pentru $\theta_n=0$ se obține

$\pi_n = \dfrac{\theta_{n-1}}{\varphi + \theta_n}\pi_{n-1} = \dfrac{n-1}{\rho}\pi_{n-1}$. Cauza este că, în timp ce distribuția Yule este nelimitată, π_i este finit. Astfel distribuția de echilibru obținută este distribuția Yule trunchiată din dreapta:

$$\begin{cases} \pi_i = f_i,\ i = 1,\ldots,n-1 \\ \pi_n = \sum_{i=n}^{\infty} f_i = \dfrac{\Gamma(n)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+n)} \end{cases}. \tag{10.7}$$

La fiecare pas starea sistemului, dacă variază, fie că realizează o creştere cu o unitate, fie că devine zero, iar această "dispariție subită" a clusterului nu este o consecință a îndepărtării consecutive a unităților componente.

Valorile medii de echilibru sunt $Z_i = \dfrac{(1-u)(i-1)}{1+(1-u)i} Z_{i-1} = \dfrac{i-1}{\rho+i} Z_{i-1}$. Prin urmare

$$Z_i(1+(1-u)i) = Z_{i-1}(1-u)(i-1)\,. \tag{10.8}$$

Considerând distribuțiile de echilibru $P_i \equiv \dfrac{Z_i}{nu}$, pentru care $\dfrac{P_i}{P_{i-1}} = \dfrac{Z_i}{Z_{i-1}}$, se obține

$$P_i(1+(1-u)i) = P_{i-1}(1-u)(i-1)\,. \tag{10.9}$$

În final putem conchide că dinamica sistemului poartă un caracter limitat, deoarece la fiecare pas clusterul poate pierde sau acapara o singură unitate, i.e. este evoluție de tipul *step-by-step*. Rezultatele unor simulări pe calculator cu codul corespunzător pentru distribuția de echilibru π_n definită de relația (10.7) sunt prezentate în **Anexa 4**.