11. Evoluția structurilor cluster în modele *herding*

Variațiile diferitor indicatori din domeniul piețelor financiare pot fi aproximate în conformitate cu următoarea expresie [43−47]:

$$P(x) \propto \frac{A}{x^{\mu+1}} \exp\left[-\frac{x}{x_0}\right], \qquad (11.1)$$

unde μ primeşte valori în intervalul 1.4−1.6, iar A şi x_0 sunt constante. Se crede că această dependență este condiționată de efectul-*herd* [48], când un individ (agent) poate imita alți agenți asumând existența conexiunilor şi a unui flux de informație pe piață. Comportarea poate avea atât un suport rațional bazat pe informație, reputație sau compensație, cât şi irațional (efectul de turmă – *herd*) [47−51].

Au fost recent propuse câteva modele teoretice pentru a descrie această autoorganizare [52−58]. Elementul central al acestor modele reprezintă noțiunea de *cluster*. Dacă vom considera un set format din M elemente (indivizi sau agenți), atunci fiecare agent poate avea conexiuni cu fiecare din cei M-1 agenți rămaşi. Prin urmare, un cluster este un grup de agenți conectați care pot efectua un schimb de informație şi îndeplini aceleaşi acțiuni dintr-un set de acțiuni posibile. Considerând că rezultatul este proporțional cu numărul de agenți din cluster [53], atunci distribuția clusterului după dimensiune poate corespunde distribuției unor indicatori $R(t)$, de exemplu, economico-financiari atunci când avem clusteri economici. Expresia lui $R(t)$ în momentul de timp t poate fi obținută pe baza diferenței următoare [59]:

$$\frac{R(t)}{\lambda} = \ln P(t) - \ln P(t-1)\,, \qquad (11.2)$$

unde $R(t)$ şi $P(t)$ ar putea fi respectiv profitul şi prețul în momentul de timp t, iar λ, în cazul dat, este un parametru ce caracterizează rigiditatea prețului la fluctuațiile cerere-ofertă. Dacă n_s reprezintă numărul clusterilor cu dimensiunea s, într-un sistem format în total din M agenți, atunci $\frac{sn_s}{M}$ defineşte probabilitatea lui $R(t)$ de a avea dimensiunea relativă $\frac{s}{M}$.

Rodgers et al [47, 56−58] a dezvoltat şi soluționat analitic un model cinetic care descrie distribuția clusterilor după dimensiune în prezența a doar două fenomene din următoarele posibile: creştere (*growth*), fragmentare (*fragmentation*), coagulare (*coagulation*), adunare (*addition*) şi anexare (*attachment*). Celor 10 combinații posibile le vor corespunde diferite variante ale modelului. Vom defini în continuare aceste fenomene pe baza noțiunii de cluster. Astfel, prin **creştere** se va denumi procesul în care un nou cluster de dimensiunea 1 (*monomer*) sau agent liber este introdus în sistem, fapt ce contribuie la creşterea dimensiunii acestuia. **Fragmentarea** poate fi definită ca un process în care un cluster se divizează în agenți liberi. **Coagularea** este procesul de conexiune a doi clusteri, formând un singur cluster din cei doi prezenți inițial. **Adunarea** poate fi descrisă ca un caz special al coagulării, când un agent liber din sistem este anexat aleator la un oarecare cluster. Prin urmare, acest proces este posibil doar în cazul existenței agenților liberi în sistem. **Anexarea** este procesul în care un agent nou din exteriorul sistemului se anexează unui oarecare cluster contribuind la creşterea dimensiunii atât a clusterului corespunzător, cât şi a sistemului în întregime. În continuare vom efectua o analiză succintă a modelelor corespunzătoare. Sunt analizate ambele cazuri când ratele de tranziție sunt independente sau dependente de dimensiunea clusterilor. În cel din urmă caz, clusterii cu dimensiunea mai mare se dezvoltă mai rapid decât cei mici, deoarece este mai probabil cazul că doi agenți aparținând la diferiți clusteri cu dimensiuni mari vor contacta între ei. Distribuția de echilibru a clusterilor după dimensiune, obținută de către autori în formă analitică, posedă o dependență de putere truncată exponențial (*power law with an exponential cut-off*).

Alte contribuții de referință în acest domeniu de cercetare ar putea fi, de exemplu, publicațiile [60−68].

Modelul A. ***Creştere şi coagulare***

În fiecare moment de timp t, este posibilă realizarea următoarelor evenimente: cu probabilitatea p un agent din exterior este anexat sistemului, rămânând însă liber, şi cu probabilitatea 1-p doi clusteri sunt selectaţi pentru coagulare cu rata independentă de dimensiune. Schematic aceste procese vor fi reprezentate corespunzător astfel: $0 \to B_1$ şi $B_r + B_s \to B_{r+s}$. Evoluţia numărului clusterilor cu dimensiunea s, $n_s(t)$, în acest sistem deschis este determinată de relaţia (*rate equation*):

$$\frac{dn_s(t)}{dt} = \frac{q}{N(t)^2}\sum_{r=1}^{s-1} n_r n_{s-r} - \frac{2qn_s}{N(t)} + p\delta_{s,1}\,. \qquad (11.3)$$

În această ecuaţie

$$N(t) = \sum_{s=1}^{\infty} n_s(t) \qquad (11.4)$$

reprezintă numărul total de clusteri în sistem, iar

$$M(t) = \sum_{s=1}^{\infty} s\, n_s(t) \qquad (11.5)$$

este numărul total de agenţi. Primul termen din partea dreaptă a ecuaţiei (11.3) descrie apariţia unui cluster nou cu dimensiunea s prin coagularea a doi clusteri cu dimensiunile r şi s-r, pentru $r<s$. Cel de-al doilea termen caracterizează dispariţia unui cluster cu dimensiunea s în rezultatul coagulării cu un alt cluster, iar termenul final se referă la introducerea unor agenţi noi în sistem. Sumând ambele părţi ale ecuaţiei (11.3) după s, obţinem:

$$\frac{dN(t)}{dt} = 2p - 1 \qquad (11.6)$$

şi

$$\frac{dM(t)}{dt} = p\,. \qquad (11.7)$$

Ecuaţia (11.6) descrie faptul, că *în mediu* cu probabilitatea 2p-1 numărul clusterilor creşte cu o unitate, iar ecuaţia (11.7) – cu probabilitatea p numărul de agenţi creşte cu 1. Forma expresiilor

(11.3), (11.6) şi (11.7) sugerează existenţa unei soluţii liniare după t pentru $n_s(t)$, când $p>1/2$ şi pentru valori mari ale lui t. În această limită

$$N(t) = (2p-1)t \text{ şi } M(t) = pt\,. \tag{11.8}$$

Notând
$$n_s(t) = tc_s\,, \tag{11.9}$$

se obţine

$$c_s = \frac{1-p}{(2p-1)^2}\sum_{r=1}^{s-1} c_r c_{s-r} - \frac{2(1-p)c_s}{2p-1} + p\delta_{s,1}\,. \tag{11.10}$$

Introducând funcţia generatoare

$$g(\omega) = \sum_{s=1}^{\infty} c_s \omega^s\,, \tag{11.11}$$

se obţine

$$g(\omega) = \frac{2p-1}{2(1-p)}\left[1-\sqrt{1-4(1-p)p\omega}\right], \tag{11.12}$$

şi o distribuţie corespunzătoare a clusterilor după dimensiune

$$c_s = \frac{(2p-1)p^s(1-p)^{s-1}(2s-2)!}{s!(s-1)!}\,. \tag{11.13}$$

Utilizând formula lui Stirling pentru valori mari ale lui s, se poate scrie:

$$c_s \propto (4p(1-p))^s s^{-3/2}\,. \tag{11.14}$$

Astfel putem constata că pentru modelul respectiv există o distribuţie a dimensiunii clusterilor cu puterea 3/2 şi un cut-off exponenţial care dispare pentru $p \to 1/2$. În timp ce parametrul p tinde către valoarea 1/2, apariţia clusterilor de toate dimensiunile este posibilă şi modelul, prin urmare, nu posedă proprietatea de autoorganizare.

În cazul tranziţiilor dependente de dimensiune, ecuaţia (11.3) se va scrie astfel:

$$\frac{dn_s(t)}{dt} = \frac{q}{M(t)^2}\sum_{r=1}^{s-1} rn_r(s-r)n_{s-r} - \frac{2qsn_s}{M(t)} + p\delta_{s,1}\,. \tag{11.15}$$

Folosind aceleaşi procedee de mai sus, ecuaţia asimptotică pentru distribuţie capătă forma:

$$c_s \propto \left(\frac{p}{1-p}\right)^s s^{-5/2}. \qquad (11.16)$$

Prin urmare, distribuția clusterilor cu dimensiuni mari este aproximată cu puterea 5/2 şi un cut-off exponențial care dispare pentru $p \to 1/2$.

Modelul B. ***Fragmentare şi coagulare***

Fie p reprezintă probabilitatea că un cluster va fi aleator selectat pentru fragmentare şi 1-p este probabilitatea coagulării a doi clusteri în mod aleator. Schematic aceste procese pot fi corespunzător reprezentate astfel: $B_r \to rB_1$ şi $B_r + B_s \to B_{r+s}$. Ratele sunt proporționale cu dimensiunea clusterilor. Numărul clusterilor cu dimensiunea s, n_s, este determinat de către expresia:

$$n_s = \frac{(1-p)^{s-1}(2s-2)!}{(2-p)^{2s-1}s!^2} N_0, \qquad (11.17)$$

unde N_0 este numărul total de agenți în system. Pentru valori mari ale lui s a fost obținută expresia:

$$n_s \propto N_0 \left(\frac{4(1-p)}{(2-p)^2}\right)^s s^{-5/2}, \qquad (11.18)$$

care este o funcție la puterea 5/2 cu un cut-off exponențial care dispare doar la p=0.

Dispersia (*variance*) σ^2:

$$\sigma^2 = M_3 - M_2^2 = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}, \qquad (11.19)$$

unde

$$M_i \equiv \frac{1}{N_0}\sum_{s=1}^{\infty} s^i n_s \qquad (11.20)$$

reprezintă momentul i al lui n_s.

Modelul C. ***Anexare şi fragmentare***

În fiecare moment de timp t, cu probabilitatea p un agent din exterior se anexează unui cluster al sistemului cu dimensiunea k cu o rată proporţională lui k, iar cu probabilitatea 1-p un cluster este selectat aleator şi fragmentat în agenţi liberi. Schematic aceste procese pot fi corespunzător reprezentate astfel: $B_1 + B_r \to B_{r+1}$ şi $B_r \to rB_1$. Ratele sunt proporţionale cu dimensiunea clusterilor. Numărul clusterilor cu dimensiunea s, $n_s(t)$, este determinat de către expresia asimptotică pentru $t\to\infty$:

$$n_s(t) = \frac{p(1-p)}{\alpha}\Gamma(\beta)\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\beta)}t, \tag{11.21}$$

Pentru $s\to\infty$,
$$n_s(t) \propto t\, s^{-\beta}, \tag{11.22}$$

unde

$$\beta = 2 + \frac{1-p}{\alpha} = 2\left[\frac{\sqrt{4p/(1-p)+1}}{\sqrt{4p/(1-p)+1}-1}\right]. \tag{11.23}$$

În acest model, prin urmare, se obţine o dependenţă de puterea $\beta \geq 2$ pentru distribuţia clusterilor după dimensiune pentru întregul spectru de valori ale parametrilor.

Modelul D. ***Creştere şi adunare***

În fiecare moment de timp t, cu probabilitatea p dimensiunea sistemului creşte prin introducerea unui agent nou din exterior şi cu probabilitatea 1-p un agent liber din sistem este selectat aleator şi anexat unui cluster de dimensiunea k cu rata k. Schematic aceste procese pot fi corespunzător reprezentate astfel: $0 \to B_1$ şi $B_1 + B_r \to B_{r+1}$. Similar cazului precedent, expresia pentru distribuţia clusterilor, $n_s(t)$, a fost obţinută pentru p>1/2:

$$n_s(t) = p(2p-1)\Gamma(1+\frac{1}{1-p})\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{1-p})}t\,, \qquad (11.24)$$

unde pentru $s \to \infty$, $$n_s(t) \propto t\, s^{-\frac{1}{1-p}}\,. \qquad (11.25)$$

În concluzie putem menționa, că soluțiile analitice exacte au fost obținute pentru cele patru modele A−D descrise mai sus, iar în cazul ultimilor două modele, C şi D, a fost posibil şi determinarea exactă a unor valori universale ale puterilor care pot varia continuu în funcție de probabilitatea *p*. Se poate, totodată, presupune, că există procese diferite care cauzează apariția dependenței de putere a distribuției dimensiunii clusterilor. Deşi nu este necesar a se cunoaşte detaliat comportarea sistemului la nivel microscopic, latura esențială a acestor modele reprezintă caracterul lor universal în contextul unor interacțiuni complexe. Iar acest fapt poate fi atribuit şi interacțiunilor sociale din lumea noastră modernă, în particular proceselor simple din diferite rețele sociale (*social networks*), precum şi fenomenelor financiare şi economice pentru care este propriu un flux informațional stabil între agenții care se pot grupa, adică pot forma clusteri. Aceste rezultate sunt în concordanță bună cu cele relatate în lucrările precedente [52−55].