

## 14. Model de interacțiune într-o populație eterogenă

Există două abordări de bază ale interacțiunii într-o populație eterogenă. Prima se bazează pe ipoteza comportării raționale ale indivizilor și se concentrează asupra importanței altruismului reciproc: indivizii cooperează în schimbul cooperării altor indivizi [97–99]. Modelele din celălalt grup se referă la importanța evoluției culturale [100, 101] și genetice [102–105]. În particular, Fehr and Fischbacher [106] au descris recent un șir de fapte conform cărora comportamentul uman deseori se bazează pe așa-numita cooperare condiționată, adică individul cooperează dacă alți membri ai grupului fac același lucru. Multe studii au arătat că oamenii sunt motivați nu doar de interesele economice, dar de asemenea de normele morale și de reciprocitate, care la rândul lor ar putea fi explicate în termenii selecției evolutive. Religiă este un mecanism fundamental în consolidarea acestor norme sociale. Totodată, deși în multe cazuri este ușor de definit și identificat un comportament pro-social, în general preferințele individuale trebuie tratate în calitate de informație privată. Astfel, dacă individul  $A$  ca jucător activ (*active player*) va interacționa într-un mod altruist cu individul  $B$  (*passive player*), atunci individul  $A$  ar trebui doar să presupună, fără a cunoaște exact, care dintre posibilele sale acțiuni vor fi cele mai dorite de către  $B$ . Deși această opinie este deseori neglijată în cercetările științifice, atunci când se afirmă că un comportament pro-social este întotdeauna bine identificat, ea este prezentă în literatura religioasă. “Dorește-i aproapelui tău ceea ce îți dorești ție însuși” este o constatare a faptului, că, deși nu se cunoaște preferințele indivizilor pasivi, acțiunile se vor baza pe presupunerea că ele nu diferă. În acest context sunt posibile următoarele clasificări ale acțiunilor pro-sociale: pe de o parte, a acționa doar așa cum se crede că este bine (în continuare regula  $J$ ) și, pe de altă parte, a nu face ceea ce se consideră că-i rău (în continuare regula  $H$ ). Istoria filozofiei

cunoaște adepți ai ambelor reguli. Astfel filozofii greci Sextus, Aristotle, Aristippus și Isocrates erau adepții regulei  $J$ , iar Pittacus și Thales s-au situat de partea regulei a doua. Filozoful chinez Confucius, în virtutea faptului că primul set de acțiuni se conțin în cel de-al doilea care pare a fi mai liberal, le-a recomandat pe ambele. În continuare vom prezenta un model stocastic [107] și programul de calcul corespunzător (pagina 143) pentru cercetarea impactului social al acestor două reguli atât atunci când ele sunt respectate, cât și în cazul când o parte a populației nu face acest lucru. Care este atunci acea “masă critică” care ar putea afecta o evoluție pro-socială stabilă?

Să considerăm  $N$  persoane (agenți), care se pot afla în trei stări diferite, pe care le vom numi *Left*, *Center* și *Right*, și pot îndeplini trei acțiuni (iarăși *Left*, *Center* și *Right*). Interacțiunea implică întotdeauna un agent activ și altul pasiv. Indivizii posedă preferințe bine definite: ei preferă o anumită stare, sunt imparțiali față de altă stare și o displac pe cea de-a treia. Când două persoane interacționează, atunci agentul activ stabilește starea agentului pasiv conform acțiunii proprii, care la rândul ei este determinată de normele morale proprii. Astfel există șase combinații posibile care sunt prezentate în Tabelul 14.1, unde  $p_1 \dots p_6$  reprezintă probabilitatea de a depista aleator un oarecare agent în una din cele șase combinații de preferințe sau, cu alte cuvinte, cota populației corespunzătoare caracterizată de fiecare combinație de preferințe.

Tabelul 14.1. Distribuția agenților în clusteri

<i>Tipul</i>	<i>Starea preferată</i>	<i>Starea respinsă</i>	<i>Probabilitatea</i>
1	Left	Center	$p_1$
2	Left	Right	$p_2$
3	Center	Left	$p_3$
4	Center	Right	$p_4$
5	Right	Left	$p_5$
6	Right	Center	$p_6$

Fie  $N = 1, 2, \dots, \infty$  reprezintă numărul total de agenți, iar  $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$  este distribuția lor în șase grupuri care

corespund probabilităților  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ . Fiecare grup reprezintă un *cluster* care se realizează cu probabilitatea  $p_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Dimensiunea fiecărui cluster poate varia de la 0 până la  $N$ ,  $n_i = \overline{0, N}$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , și  $\sum_{i=1}^6 n_i = N$ . Astfel numărul rezultatelor posibile  $P$  este funcție de  $N$ , iar soluția explicită se calculează astfel:

$$\begin{aligned}
P(N) &= {}_6C_1 + (N-1) {}_6C_2 + (1 + \sum_{i=2}^{N-2} i) {}_6C_3 + (N-3) \\
&+ (N-2) \sum_{i=2}^{N-3} i - \sum_{i=2}^{N-3} i^2) {}_6C_4 + (1 + \sum_{i=2}^{N-4} i + \sum_{i=3}^{N-3} i \sum_{l=2}^{i-1} l \\
&- (N-3) \sum_{i=2}^{N-4} i^2 + \sum_{i=2}^{N-4} i^3) {}_6C_5 + (N-5 + \sum_{i=2}^{N-5} (N-i-4)i \\
&+ \sum_{i=3}^{N-4} (N-i-3)i \sum_{l=2}^{i-1} l - \sum_{i=2}^{N-5} i^2 \sum_{l=i+1}^{N-4} l + \sum_{i=2}^{N-5} (N-i-4)i^3) {}_6C_6 \quad (14.1) \\
&= 2(74N - 213) + 2(11N - 13) \sum_{i=2}^{N-5} i + 2(1 - 3N) \sum_{i=2}^{N-5} i^2 \\
&+ (2 + N) \sum_{i=2}^{N-5} i^3 - \sum_{i=2}^{N-5} i^4 + \sum_{i=3}^{N-4} ((3 + N)i - i^2) \sum_{l=2}^{i-1} l \\
&- \sum_{i=2}^{N-5} i^2 \sum_{l=i+1}^{N-4} l = \frac{1}{5!} \prod_{i=1}^5 (N + i),
\end{aligned}$$

unde coeficienții  ${}_6C_1 = {}_6C_5 = 6$ ,  ${}_6C_2 = {}_6C_4 = 15$ ,  ${}_6C_3 = 20$ ,  ${}_6C_6 = 1$  sunt calculați conform formulei generale pentru combinații

${}_n C_k \equiv \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)!k!}$ . Unele rezultate numerice sunt prezentate în

Tabelul 14.2.

În caz general, pentru un număr arbitrar de clusteri  $n > 1$  se obține:

$$P(N) = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (N+i). \quad (14.2)$$

Tabelul 14.2. Unele rezultate numerice ale distribuției pentru  $n=6$

$N$	$P$	$N$	$P$	$N$	$P$
1	6	11	4,368	21	65,780
2	21	12	6,188	22	80,730
3	56	13	8,568	23	98,280
4	126	14	11,628	24	118,755
5	252	15	15,504	25	142,506
6	462	16	20,349	50	3,478,761
7	792	17	26,334	100	96,560,646
8	1,287	18	33,649	200	2,872,408,791
9	2,002	19	42,504	600	664,353,676,371
10	3,003	20	53,130	1,000	8,459,043,543,951

În rezultatul fiecărei interacțiuni agentul pasiv obține payoff-ul +1 dacă este în starea preferată, un payoff 0 în cazul stării neutre sau un payoff -1 în cazul stării pe care o urăște. Agentul activ nu este influențat de rezultatele interacțiunii. Astfel acesta oricând obține un payoff nenegativ, deoarece acționează conform normelor sale morale: dacă agentul activ acționează bazându-se pe regula  $J$ , atunci acțiunile lui sunt doar din grupul celor preferate, iar pentru regula  $H$  există o selecție aleatoare sau stocastică dintre stările preferate și cele neutre. În model nu există interacțiunea strategică din teoria jocurilor (*game theory*), deoarece payoff-ul agentului pasiv depinde de alegerea făcută de agentul activ, pe când alegerea respectivă nu va depinde în nici un mod de preferințele agentului pasiv. Astfel echilibrul Nash nu poate fi aplicat. Evoluția sistemului este estimată cantitativ cu ajutorul valorii medii  $\pi$  și a dispersiei  $\sigma^2$  calculate pentru payoff, care caracterizează corespunzător nivelul de evoluție și cel al inegalității într-o populație eterogenă. Rezultatele preliminare pentru două cazuri limită sunt

evidente: dacă toți agenții ar poseda aceleași preferințe, atunci regula  $J$  este mai eficientă pentru o asemenea polarizare maximă, iar atunci când există o dispersie omogenă  $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 1/6$  se constată că  $\pi=0$  și ambele reguli sunt echivalente.

Să considerăm în continuare că fiecare individ interacționează cu întregul grup atât ca agent activ, cât și în calitate de agent pasiv. Atunci valoarea medie  $\pi$  se calculează pentru ambele reguli de interacțiune astfel:

$$\begin{aligned} \pi_J = & (p_1 + p_2)(p_1 + p_2 - p_3 - p_5) + (p_3 + p_4)(-p_1 + p_3 + p_4 - p_6) \\ & + (p_5 + p_6)(-p_2 - p_4 + p_5 + p_6), \end{aligned} \quad (14.3)$$

$$\begin{aligned} \pi_H = & \frac{1}{2}(p_1(p_1 - p_3 - p_5 + p_6) + p_2(p_2 - p_3 + p_4 - p_5) \\ & + p_3(-p_1 + p_3 + p_5 - p_6) + p_4(-p_1 + p_2 + p_4 - p_6) \\ & + p_5(-p_2 + p_3 - p_4 + p_5) + p_6(p_1 - p_2 - p_4 + p_6)). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Pentru a reprezenta grafic diferența  $\pi_J - \pi_H$ , vom considera nule unele probabilități. Astfel pentru doar o singură probabilitate diferită de zero (deci egală cu 1), se obține  $\pi_J - \pi_H = \frac{1}{2} > 0$ . Pentru două probabilități diferite de zero există un set format din  ${}_6C_2 = 15$  ecuații, care pot fi grupate în doar trei forme funcționale diferite și curbele respective sunt reprezentate pe Figura 14.1 pentru toate valorile lui  $p_i$  și  $p_j = 1 - p_i$ . Constatăm în continuare, că regula  $J$  este mai eficientă pentru orice  $p_i$ , cu excepția unei singure valori egale cu 0.5, când diferența dată este nulă. Pentru trei, patru și cinci probabilități diferite de zero se obțin respectiv  ${}_6C_3 = 20$ ,  ${}_6C_4 = 15$  și  ${}_6C_5 = 6$  ecuații pentru  $\pi_J - \pi_H$ . Ele se reduc la doar trei forme funcționale diferite pentru trei și patru probabilități nenule ale modelului, iar pentru cinci probabilități diferite de zero există o singură expresie pentru  $\pi_J - \pi_H$  (vezi Tabelul 14.3). Pe Figurile 14.2 și 14.3 este reprezentat profilul

diferenței  $\pi_J - \pi_H$  pentru trei probabilități diferite de zero. Constatăm că pe Figura 14.3 a apărut o regiune negativă, unde regula  $H$  este mai eficientă. Pasul de variație a probabilității este 0.1.

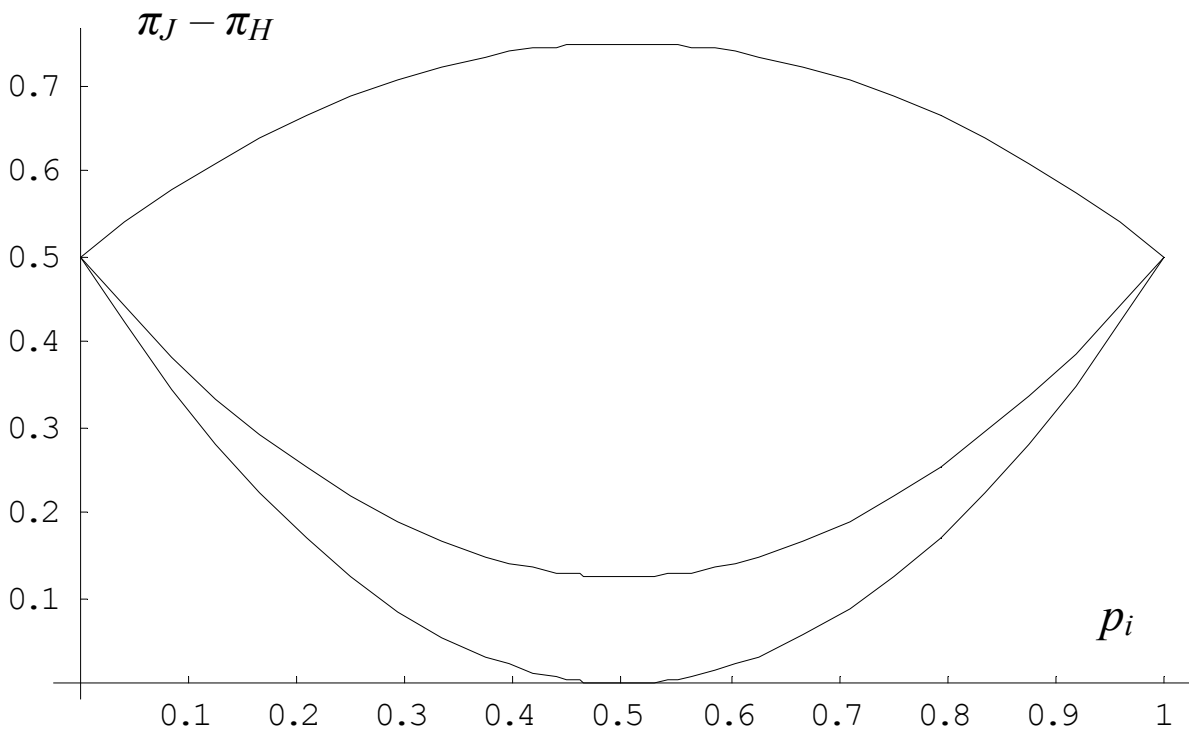


Figura 14.1.  $\pi_J - \pi_H$  pentru două probabilități diferite de zero,  $p_i$  and  $p_j = 1 - p_i$ .

Tabelul 14.3. Expresiile  $\pi_J - \pi_H$  pentru un număr diferit de probabilități  $p_i$  diferite de zero,  $i=1\div 6$

<i>Nr.</i> $p_i$	<i>Probabilitățile nenule</i>	<i>Expresiile pentru</i> $\delta = \pi_J - \pi_H$
2	$(p_1, p_2) (p_3, p_4) (p_5, p_6)$	$\delta_1 = \frac{1}{2} + p_i - p_i^2$
	$(p_1, p_3) (p_1, p_6) (p_2, p_4)$ $(p_2, p_5) (p_3, p_5) (p_4, p_6)$	$\delta_2 = \frac{1}{2} (1 - 2p_i)^2$

Tabelul 14.3 (continuare)

<i>Nr.</i> $p_i$	<i>Probabilitățile nenule</i>	<i>Expresiile pentru</i> $\delta = \pi_j - \pi_H$
	$(p_1, p_4) (p_1, p_5) (p_2, p_3)$ $(p_2, p_6) (p_3, p_6) (p_4, p_5)$	$\delta_3 = \frac{1}{2}(1 + 3p_i(p_i - 1))$
3	$(p_1, p_2, p_3) (p_1, p_2, p_4)$ $(p_1, p_2, p_5) (p_1, p_2, p_6)$ $(p_1, p_3, p_4) (p_2, p_3, p_4)$ $(p_3, p_4, p_5) (p_3, p_4, p_6)$ $(p_1, p_5, p_6) (p_2, p_5, p_6)$ $(p_3, p_5, p_6) (p_4, p_5, p_6)$	$\delta_1 = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2$ $+ 4p_h p_i - 2p_h p_j - p_i p_j)$
	$(p_1, p_3, p_5) (p_1, p_3, p_6)$ $(p_2, p_3, p_5) (p_2, p_4, p_5)$ $(p_1, p_4, p_6) (p_2, p_4, p_6)$	$\delta_2 = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2$ $- 2(p_h p_i + p_i p_j) - p_h p_j)$
	$(p_2, p_3, p_6) (p_1, p_4, p_5)$	$\delta_3 = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2$ $- p_h p_i - p_h p_j - p_i p_j)$
4	$(p_1, p_2, p_3, p_4)$ $(p_1, p_2, p_5, p_6)$ $(p_3, p_4, p_5, p_6)$	$\delta_1 = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2 + p_k^2$ $+ 4(p_h p_i + p_j p_k) - 2(p_h p_j$ $+ p_i p_k) - p_i p_j - p_h p_k)$
	$(p_1, p_2, p_3, p_5)$ $(p_1, p_2, p_4, p_6)$ $(p_1, p_3, p_4, p_6)$ $(p_1, p_3, p_5, p_6)$ $(p_2, p_3, p_4, p_5)$ $(p_2, p_4, p_5, p_6)$	$\delta_2 = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2$ $+ p_k^2 + 4p_h p_i - 2(p_h p_j$ $+ p_i p_k + p_j p_k)$ $- p_i p_j - p_i p_k)$

Tabelul 14.3 (continuare)

<i>Nr.</i> $p_i$	<i>Probabilitățile nenule</i>	<i>Expresiile pentru</i> $\delta = \pi_J - \pi_H$
	$(p_1, p_2, p_3, p_6)$ $(p_1, p_2, p_4, p_5)$ $(p_1, p_3, p_4, p_5)$ $(p_2, p_3, p_4, p_6)$ $(p_2, p_3, p_5, p_6)$ $(p_1, p_4, p_5, p_6)$	$\delta_3 = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 + 4p_h p_i - 2(p_h p_j + p_h p_k) - p_i p_j - p_i p_k - p_j p_k)$
5		$\delta = \frac{1}{2}(p_h^2 + p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 + p_l^2 + 4(p_h p_i + p_j p_k) - 2(p_h p_j + p_i p_k + p_i p_l + p_j p_l) - p_i p_j - p_h p_k - p_h p_l - p_k p_l)$

Astfel s-a constatat, că competiția dintre cele două tipuri de interacțiuni depinde de gradul de polarizare a preferințelor indivizilor. Pentru a cerceta acest fenomen, vom reprezenta această distribuție în spațiul tridimensional cu axele de coordonate  $l$ ,  $c$  și  $r$ , unde

$$\begin{aligned} l &= p_1 + p_2 - p_3 - p_5, \\ c &= p_3 + p_4 - p_1 - p_6, \\ r &= p_5 + p_6 - p_2 - p_4. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Vom menționa, că  $l + c + r = 0$  și diferite distribuții pot genera același punct în spațiu. De exemplu, originea de coordonate corespunde atât setului de probabilități  $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ , cât și la fiecare combinație de tipul  $p_1 = p_3$ ,  $p_2 = p_5$ ,  $p_4 = p_6$ . Acum putem defini gradul de polarizare a preferințelor sociale ca distanța de la centrul sferei:  $d(l, r, c) \equiv d(p_1, p_2, \dots, p_6) = \sqrt{l^2 + r^2 + c^2}$ , unde  $d \in [0, \sqrt{2}]$ : toate punctele, prin urmare, se vor afla în interiorul acestei sfere cu centrul în origine.



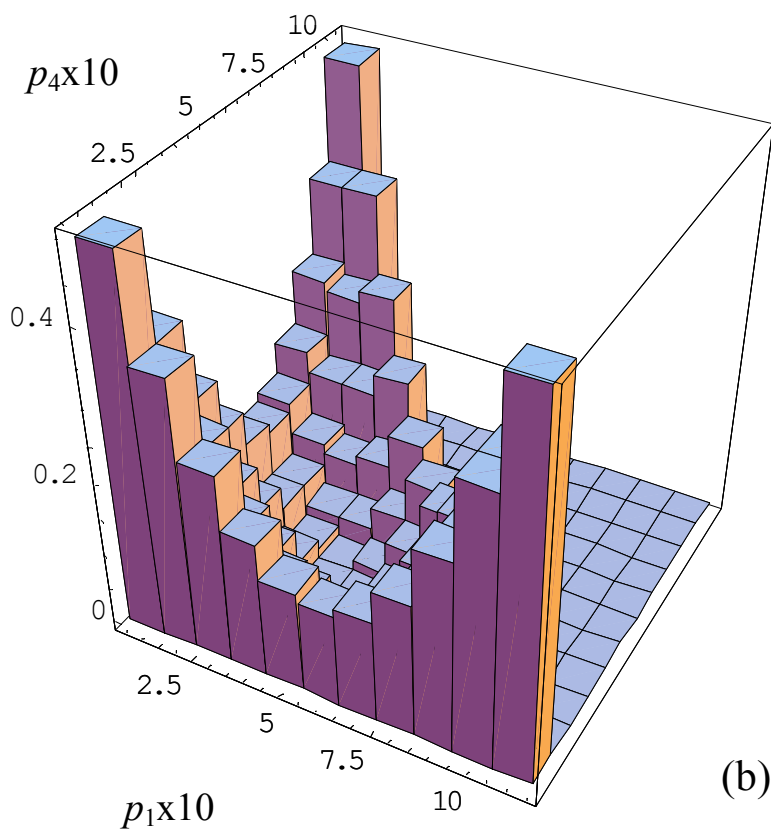
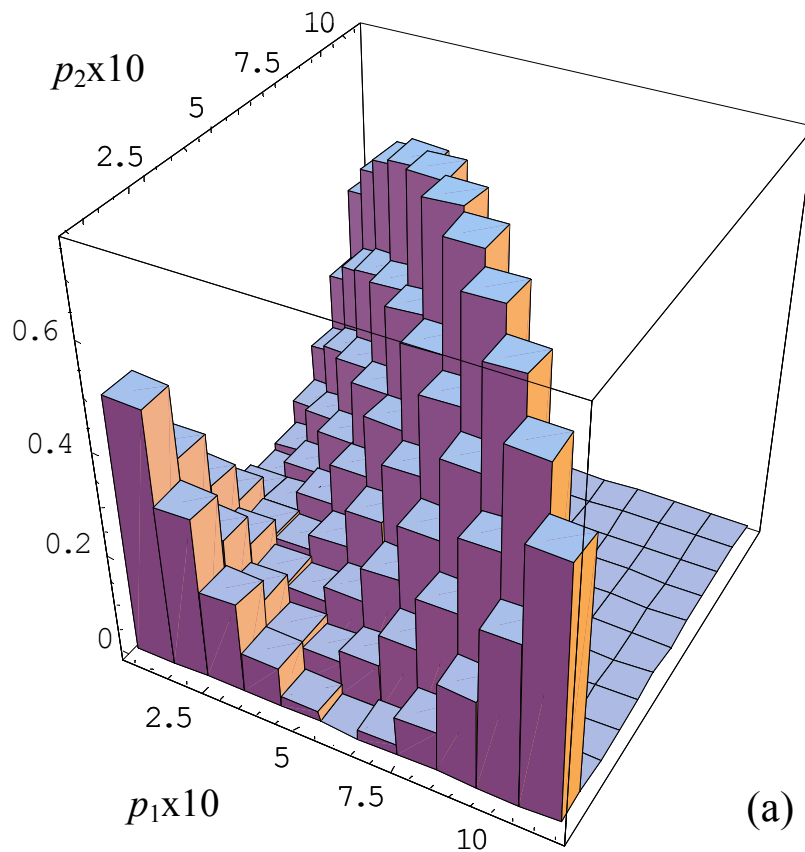


Figura 14.2.  $\pi_J - \pi_H$  pentru trei probabilități diferite de zero,  $p_1, p_2, p_3 \neq 0$  (a) și  $p_1, p_4, p_5 \neq 0$  (b).

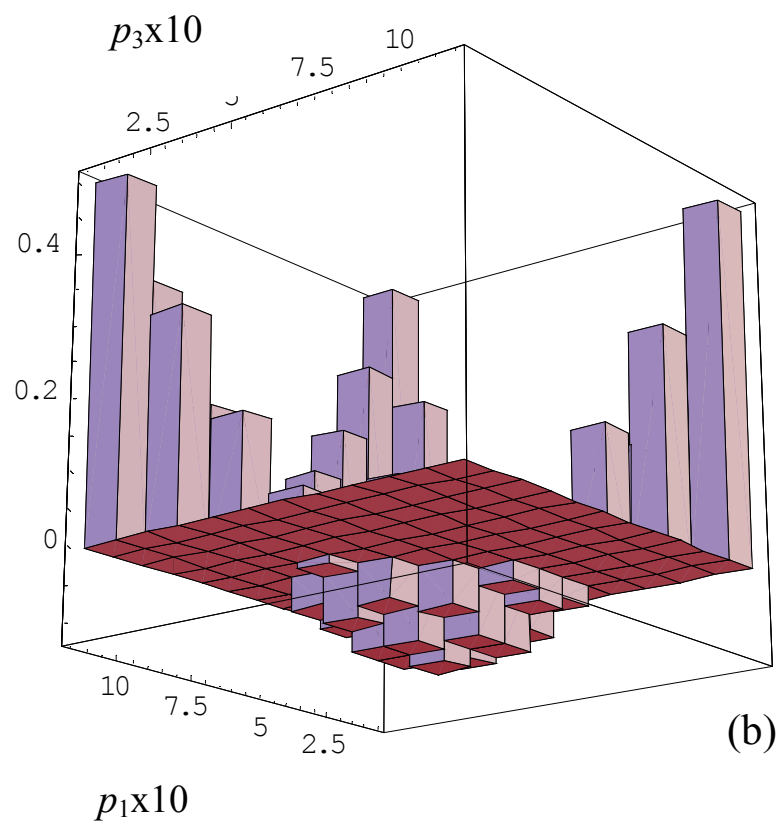
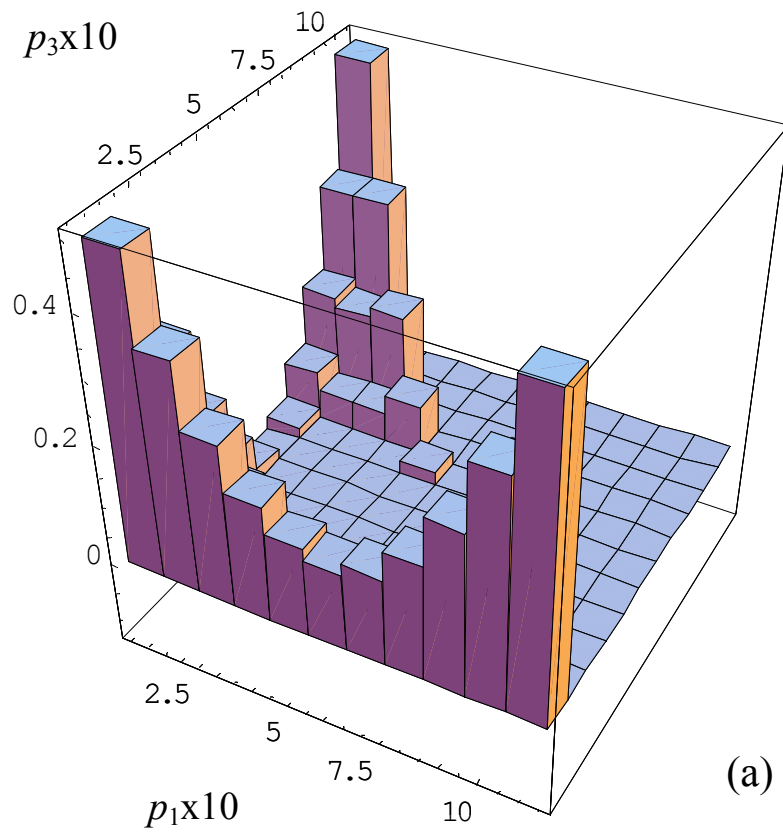


Figura 14.3.  $\pi_J - \pi_H$  pentru trei probabilități diferite de zero  $p_1, p_3, p_5 \neq 0$  privită de sus (a) și de jos (b).

A fost cercetată variația rezultatelor în funcție de distanța  $d$ . Este examinat întregul spectru al probabilităților  $[0,1]$ , pentru toate  $p_1 \dots p_6$ , cu pasul 0.025. Sunt calculate numărul total de evenimente pentru  $\pi_J - \pi_H > 0$  și când  $\pi_J - \pi_H < 0$ , iar apoi pentru fiecare grup dintr-un interval egal cu 0.025 este determinată frecvența realizării evenimentelor respective. În centrul sferei s-a obținut același payoff pentru ambele reguli de interacțiune, iar la o mică îndepărtare de la centru frecvențele sunt aproximativ egale. Apoi numărul cazurilor pentru care  $\pi_J - \pi_H > 0$  crește pentru distanțe mai mari de la centrul sferei.

Dispersiile  $\sigma_J^2$  și  $\sigma_H^2$  pot fi definite pentru fiecare tip de distribuție  $D \equiv J, H$  cu valoarea medie  $\pi_D$  astfel:

$$\sigma_D^2 = \sum_{i=1}^6 p_i (\pi_{i,D} - \pi_D)^2, \quad (14.6)$$

unde

$$\begin{aligned} \pi_{1,J} &= p_1 + p_2 - p_3 - p_4, & \pi_{4,J} &= p_3 + p_4 - p_5 - p_6, \\ \pi_{2,J} &= p_1 + p_2 - p_5 - p_6, & \pi_{5,J} &= -p_1 - p_2 + p_5 + p_6, \\ \pi_{3,J} &= -p_1 - p_2 + p_3 + p_4, & \pi_{6,J} &= -p_3 - p_4 + p_5 + p_6 \end{aligned} \quad (14.7)$$

și

$$\begin{aligned} \pi_{1,H} &= (p_1 - p_3 - p_5 + p_6)/2, & \pi_{4,H} &= (-p_1 + p_2 + p_4 - p_6)/2, \\ \pi_{2,H} &= (p_2 - p_3 + p_4 - p_5)/2, & \pi_{5,H} &= (-p_2 + p_3 - p_4 + p_5)/2, \\ \pi_{3,H} &= (-p_1 + p_3 + p_5 - p_6)/2, & \pi_{6,H} &= (p_1 - p_2 - p_4 + p_6)/2. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Conform rezultatelor numerice obținute [107], dispersia  $\sigma_J^2$  este mai mare decât  $\sigma_H^2$ , aceasta discrepanță fiind mai pronunțată pentru cele două cazuri limită de dispersie și polarizare a preferințelor.

În continuare modelul poate fi modificat pentru a cerceta impactului social al unor abateri de la respectarea normelor morale, când la început se presupune că indivizii vor acționa așa cum ultimul oponent au acționat asupra lor. Patru probabilități din cele șase sunt selectate aleator, fie  $p_a \dots p_d$ . Apoi notăm  $p_e = 0$  și probabilitatea rămasă este  $p_f = 1 - (p_a + p_b + p_c + p_d + p_e)$ . Calculele numerice

au fost realizate pentru un grup format din 600 indivizi. Toate interacțiunile sunt simulate [108] pentru 1,000 perioade – un interval de timp suficient ca procesul de selecție să se realizeze pentru mărimea dată a populației. Pe Figura 14.4 sunt prezentate rezultatele pentru  $p_2 = 0.22\bar{3}$ ,  $p_3 = p_6 = 0$ ,  $p_4 = 0.1\bar{3}$ ,  $p_1 \in [0, 0.76]$  și  $p_5 = 1 - \sum_{i \neq 5} p_i$  ca funcție de  $p_5$ . Se observă că doar o singură acțiune este selectată aleator.

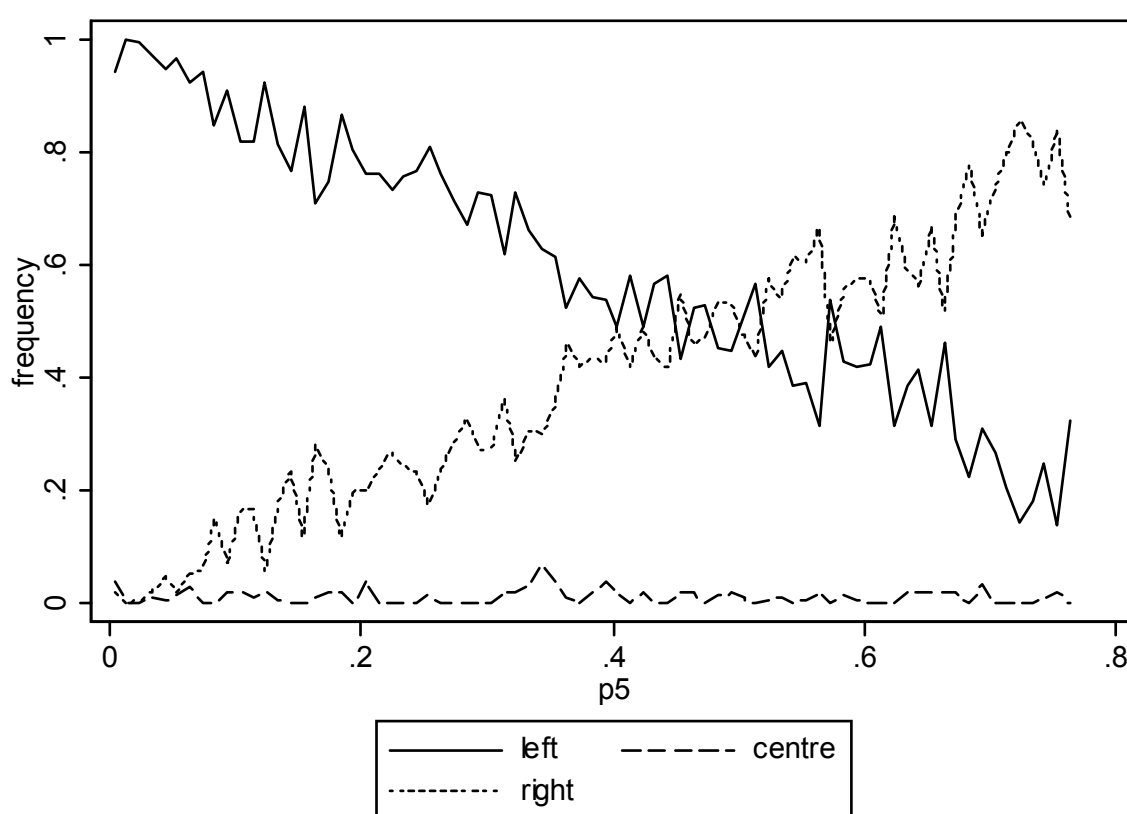


Figura 14.4. Frecvența (*frequency*) de selecție a acțiunilor după 1,000 perioade de calcul și patru probabilități constante.

Astfel, dacă ar exista două grupuri separate cu aceeași distribuție a preferințelor, este foarte probabil să se observe o selecție aleatoare a diferitor acțiuni finale. Totodată selecția finală a unei singure acțiuni determină o creștere atât a valorii medii pentru payoff, cât și a dispersiei. Prin urmare, nivelul inegalității sociale crește în cazul acestei strategii. Faptul dat este previzibil, deoarece atunci când o

singură acțiune este selectată într-o populație cu preferințe eterogene, cineva este foarte fericit, iar altcineva va deveni foarte nefericit.

Acum vom considera încă o variantă a modelului, când există un amestec de indivizi care respectă normele morale (regulele  $J$  și  $H$ ) cu cei care nu le respectă, și vom răspunde la întrebarea formulată la începutul acestui capitol: “Care este “masa critică” de indivizi “răi” care ar putea afecta o evoluție pro-socială stabilă?” sau, cu alte cuvinte, “Care ar trebui să fie ponderea indivizilor “morali” într-o societate pentru a putea menține o “ordine morală” neperturbată? Astfel noțiunea de referință reprezintă fracțiunea indivizilor “morali” din întreaga populație, pentru care valoarea medie pentru payoff și dispersia nu variază substanțial în raport cu aceste mărimi calculate în varianta inițială a modelului, când toți agenții acționează în conformitate cu normele morale. Au fost efectuate aproximativ 2,000 de simulări pe calculator și unele rezultate numerice relevante sunt prezentate în Tabelul 14.4. Preferințele sunt distribuite aleator, fiind însă menținute constant pe parcursul simulărilor. Observăm că atunci când doar 5% din populație respectă în continuare normele morale, rezultatele pentru medie nu diferă de cele obținute în 96.8% de cazuri pentru regula  $J$  și în 98.9% pentru strategia  $H$ , iar o fracțiune de doar 1% de indivizi “morali” este suficientă pentru a asigura “ordinea morală” în peste trei pătrimi de cazuri! În final vom menționa, că aceste rezultate pot fi relevante și pentru teoria economică, deoarece regulele  $J$  și  $H$  corespund respectiv unor idealizări ale abordărilor imperative și liberale din economie.

Tabelul 14.4. Unele date comparative pentru trei variante ale modelului de interacțiune

<i>Fracțiunea populației care respectă normele morale</i>	<i>Runs</i>	<i>Regula J</i>		<i>Regula H</i>	
		$H_0: \pi = \pi_J$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_J^2$	$H_0: \pi = \pi_H$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_H^2$
100.0%	560	97.7%	100.0%	100.0%	100.0%
5.0%	560	96.8%	99.8%	98.9%	99.6%
1.0%	560	78.3%	83.2%	77.0%	84.1%
0.5%	314	56.3%	65.9%	49.4%	63.1%