4. Ecuația Fokker-Planck

Ecuația Fokker-Planck, împreună cu ecuația de bază, se folosesc la cercetarea evoluției funcției densității de probabilitate $p(x,t)$ pentru variabila continuă x. Aplicații recente includ diverse sisteme stocastice, e.g. traficul rutier (*traffic flow*) [27], când modelele discrete pot fi descrise aproximativ de către ecuația Fokker-Planck pentru valori mari ale variabilei stocastice întregi n. Ecuația Fokker-Planck derivă din ecuația de bază (2.12)

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ w(x,x',t)\, p(x',t) - w(x',x,t)\, p(x,t) \} dx' , \quad (4.1)$$

folosindu-se descompunerea Kramers-Moyal unde doar primii doi termeni sunt păstrați. Spre deosebire de ecuația (2.12), aici considerăm cazul mai general când ratele sau frecvențele de tranziție sunt funcții şi de timp. Vom nota $f(y,x,t) = w(x+y,x,t)$. Atunci ecuația de bază (4.1) se va scrie:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{ f(y,x-y,t)\, p(x-y,t) - f(y,x,t)\, p(x,t) \} dy . \quad (4.2)$$

Se presupune că $f(y,x-y,t)$ este o funcție netedă în raport cu y. Ideea de bază este de a descompune produsul $f(y,x-y,t)\, p(x-y,t)$ în seria Taylor în vecinătatea lui y=0, care şi reprezintă descompunerea Kramers-Moyal:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left[\alpha_n(x,t)\, p(x,t) \right], \quad (4.3)$$

unde $\alpha_n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n f(y,x,t)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x'-x)^n w(x',x,t)dx'$

(4.4)

sunt momentele frecvențelor de tranziție $w(x',x,t)$. Menținând doar primii doi termeni în expresia (4.3), se obține ecuația Fokker-Planck:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha_1(x,t)\,p(x,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\alpha_2(x,t)\,p(x,t)\right]. \qquad (4.5)$$

Primul termen din (4.5) se numeşte termen de translație, iar cel de-al doilea – de fluctuație. Procesul de difuzie are loc datorită fluctuațiilor stocastice.

Să scriem ecuația (3.4) pentru variabila continuă x:

$$p(x,t\,|\,x',t'+\Delta t) - p(x,t\,|\,x',t')$$
$$= \int p(x'',t'+\Delta t\,|\,x',t')\left[p(x,t\,|\,x',t'+\Delta t) - p(x,t\,|\,x'',t'+\Delta t)\right] dx''$$

(4.6)

şi să calculăm limita $\Delta t \to 0$. Pentru aceeaşi aproximație pentru care a fost obținută ecuația (4.5), probabilitatea $p(x,t\,|\,x'',t')$ poate fi descompusă în seria Taylor în vecinătatea lui $x'' = x'$ păstrându-se doar primii doi termeni. Se obține ecuația Fokker-Planck reversată, adică pentru cazul când se descrie evoluția probabilității $p(x,t\,|\,x',t')$ în raport cu momentul de timp inițial t':

$$\frac{\partial p(x,t\,|\,x',t')}{\partial t'} = -\alpha_1(x',t')\frac{\partial p(x,t\,|\,x',t')}{\partial x'} - \frac{\alpha_2(x',t')}{2}\frac{\partial^2 p(x,t\,|\,x',t')}{\partial x'^2}, \qquad (4.7)$$

unde coeficienții $\alpha_1(x',t')$ şi $\alpha_2(x',t')$ sunt momentele frecvenței de tranziție (4.4).

Să cercetăm în continuare doar procesul de difuzie sau aşa-numitul proces Wiener. Prin urmare, $\alpha_1(x) = 0$ şi, considerând difuzia constantă $\alpha_2(x) = D$, ecuația (4.5) se va scrie:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (4.8)$$

a cărei soluție Gaussiană este bine cunoscută:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{2Dt}\right). \qquad (4.9)$$

Primele două momente sunt valoarea medie $\langle x \rangle = 0$ şi dispersia $\langle x^2 \rangle = Dt$ (vezi **Anexa 1**). Procesul stocastic, care corespunde unei difuzii, este echivalent următoarelor ecuații diferențiale stocastice Ito:

$$dx(t) = \sqrt{D}\, dW(t) \text{ cu } dW(t) = Z\sqrt{dt} \qquad (4.10)$$

sau, mai general, ecuației Langevin:

$$dx(t) = \alpha_1(x(t),t)\,dt + \sqrt{\alpha_2(x(t),t)}\,dW(t)\,. \qquad (4.11)$$

Termenul $dW(t) = W(t+dt) - W(t)$ se numeşte termenul Wiener de perturbare, care posedă proprietățile $\langle W(t) \rangle = 0$ şi $\langle dW(t)^2 \rangle = dt$.